

## Devoir à la maison n° 11

**Exercice 1.** On considère l'application suivante :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto \frac{1}{3}(2x - y - z, -x + 2y - z, -x - y + 2z) \end{cases} .$$

1. Montrer que l'application  $f$  est linéaire.
2. Déterminer  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$ .
3. L'application  $f$  est-elle un automorphisme de  $\mathbb{R}^3$  ?
4. Déterminer  $f \circ f$ . Que peut-on dire de l'application  $f$  ?

**Exercice 2.** Soient  $a$  un réel non nul et  $f$  la fonction définie par  $f(x) = e^{-x} \ln(1 + ax)$ .

1. Déterminer le domaine de définition  $D$  de  $f$ .  
Montrer que  $f$  est de classe  $C^\infty$  au voisinage de 0.
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de  $f$  en 0.
3. On dit que 0 est un *point d'inflexion* de  $f$  si  $f''(0) = 0$  et  $f^{(3)}(0) \neq 0$ .  
Déterminer les éventuelles valeurs de  $a$  pour lesquelles 0 est un point d'inflexion de  $f$ .  
Représenter graphiquement ce·s cas.