Corrigé dernier DS (Option CCINP)

Exercice 1

On note H le polynôme $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$ dont on remarque qu'il est scindé sur $\mathbb{R}$ et à racines simples.
1) (*) montre que H est un polynôme annulateur de u donc, compte tenu de que l'on sait de H :
$\boxed{u \text{ est bien diagonalisable}}$ ■
2) On sait alors que le spectre de u est inclus dans l'ensemble des racines de H. Autrement dit $\boxed{Sp(u) \subset \{1,2\}}$ ■
3) Comme u est dz, E est somme directe de ses sous-espaces propres.
Or celle-ci est incluse dans $Ker(v) \oplus Ker(w)$, elle même incluse dans E; donc par double inclusion :
$\boxed{E = Ker(v) \oplus Ker(w)}$ ■
4) Il suffit de juxtaposer (concaténation) une base de $Ker(v)$ et de $Ker(w)$ pour obtenir une base de diagonalisation de u■
5.3) On trouve sans problème $Ker(v) = Vect(e_1 + e_3)$ et $Ker(W) = Vect(e_1 + e_2, e_3)$■
5.4) $\boxed{D = diag(1,2,2) \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$ ■

Exercice 2

1) On a, pour $x \to 0$, $(1-x)^\alpha = 1 - \alpha x + o(x)$.
Donc $\boxed{1 - (1-x)^\alpha \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x}$ ■
2)(A)■
3.1) La suite (a_k) convergeant vers 0, le lien suite/série assure la convergence de la série $\sum_{k\geq 1} u_k$; par ailleurs (télescopage)on a : $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} u_k = a_0 = 1}$ ■
3.2) Q1 nous dit que $a_k \underset{k\to\infty}{\sim} \frac{n-1}{2^k}$ et on sait que la série géométrique $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{2^k}$ est **absolument convergente**, il en va de même pour la série $\sum_{k\geq 0} a_k$■
4.1) Résulte immédiatement de la stricte croissance de $x \to x^{n-1}$ sur $\mathbb{R}_+$■
4.2) Pour que nous ayons affaire à une loi de probabilité il faut et il suffit que la série $\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(X_n = k)$ soit une série à termes positifs convergente et de somme 1. Ce qui est assuré par 4.1) et 3.1) pour $\boxed{\lambda = 1}$■
4.3 X_n admet une espérance mathématique finie ssi la série $\sum_{k\geq 1} k\mathbb{P}(X_n = k)$ est absolument convergente (soit convergente ici).

Examinons(afin aussi d'évaluer l'espérance) les sommes partielles $T_K = \sum_{k=1}^{K} k(a_{k-1} - a_k) = \sum_{k=1}^{K} a_{k-1} + \sum_{k=1}^{K}((k-1)a_{k-1} - ka_k) = \sum_{k=1}^{K} a_{k-1} - Ka_K$ (après télescopage). Comme $Ka_K = O(\frac{K}{2^K})$ (cf 3.2), avec 3.2 à nouveau, nous obtenons que $T_K \underset{K\to\infty}{\to} \sum_{k=0}^{\infty} a_k = S_n$. Ainsi nous avons prouvé que X_n admet une espérance mathématique finie et que $\boxed{\mathbb{E}(X_n) = S_n}$■
5.1) On laisse le cas $p = 0$ qui est évident à traiter.

Pour $p \geq 1$, f_p est continue, positive sur $\mathbb{R}_+$.
Avec 1) nous avons $f_p(t) \underset{t\to\infty}{\sim} pe^{-t}$. Comme $t \to e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, il en va de même, par comparaison, de f_p. Ainsi $\boxed{I_p \text{ est-elle ACV donc convergente}}$ ■

5.2) Par linéarité des IG convergentes, et pour tout p, $I_{p+1} - I_p = \int_0^{\infty} e^{-t}(1-e^{-t})^p dt = [\frac{-(1-e^{-t})^{p+1}}{p+1}]_0^{\infty}$.
Finalement $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, I_{p+1} - I_p = \frac{1-0}{p+1} = \frac{1}{p+1}}$ ■
5.3) Il suffit d'utiliser la question précédente ■
6.1) Considérations d'aire avec la décroissance de $x \to 1/x$ sur le segment $[k, k+1]$ (fait une infinité de fois) ■
6.2) On somme pour $k = 1$ jusqu'à $k = n-1$ l'inégalité $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$, ce qui donne (Chasles) $\int_1^n \frac{dt}{t} \leq H_{n-1} = I_{n-1}$ (cf 5.3)) soit $\boxed{\ln(n) \leq I_{n-1}}$ □
En sommant de 1 à $n-2$ l'inégalité $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$, il vient cette fois $I_{n-1} - 1 \leq \int_1^{n-1} \frac{dt}{t}$ soit aussi $\boxed{I_{n-1} \leq 1 + \ln(n-1)}$ ■
7)La décroissance de g_n(qui est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$)fait (encore des considérations d'aire du même type qu'en 6.1) que :
$\forall k \in [|0, m-1|], g_n(k+1) \leq \int_k^{k+1} g_n(t)dt \leq g_n(k)$. Puis en sommant ces inégalités, nous trouvons bien $\boxed{\sum_{k=1}^{m} a_k \leq \int_0^m g_n(t)dt \leq \sum_{k=0}^{m-1} a_k}$ ■
8) Dans l'intégrale de gauche on pose $t = \frac{u}{\ln(2)}$, où u, la nouvelle variable, décrit le segment $[0, \beta\ln(2)]$ et nous obtenons facilement l'égalité voulue ■
9) On peut passer à la limite ($m \to \infty$) dans l'encadrement du 7) puisque la série $\sum_{k\geq 0} a_k$ converge (3.2)) et que, (par 8 Et 5.1)) g_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
Donc (conservation des inégalités à la la limite) : $S_n - a_0 \leq \frac{I_{n-1}}{\ln(2)} \leq S_n$ ou (cf 4.3)) $\boxed{\mathbb{E}(X_n) - 1 \leq \frac{I_{n-1}}{\ln(2)} \leq \mathbb{E}(X_n)}$ ■
10) Avec le cours (donnant un équivalent du nombre harmonique) ou avec 6.2, il vient sans peine que :
i) $I_{n-1} \underset{n\to\infty}{\to} \infty$.
ii) Avec 9) et les gendarmes que $\frac{\mathbb{E}(X_n)}{I_{n-1}} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{\ln(2)}$ ou que $\mathbb{E}(X_n) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{I_{n-1}}{\ln(2)}$.
iii) Donc (avec 6.2 ou le cours) $\boxed{\mathbb{E}(X_n) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{\ln(2)} = \log_2(n)}$ ■

Exercice 3

Si on pose $a = \frac{1}{\|u\|}u$, on dispose alors d'un vecteur unitaire et on observe alors que $\phi_u(x) = 2 < x|a > a - x$, ce pour tout $x \in E$. On notera $p : x \in E \to < x|a > a$, il s'agit (cf cours) de la projection orthogonale de E sur $Vect(a)$. Il s'agit donc d'un endomorphisme (auto-adjoint) de E. Ces considérations permettront d'alléger des calculs fastidieux.
1.1) On a en fait $\phi_u = 2p - id_E$, ce qui montre bien que ϕ_u est un endomorphisme (auto-adjoint) de E en tant que combinaison linéaire de tels endomorphismes ■
1.2)$\phi_u o \phi_u = (2p - id_E)o(2p - id_E) = 4pop - 4p + id_E = id_E$ puisque p est un projecteur.
ϕ_u est donc une symétrie de E, c'est bien un automorphisme de E dont l'inverse est elle-même ■
1.3)et 1.4) Dans une b.on de E la matrice M de ϕ_u est symétrique puisqu'il est auto-adjoint mais elle vérifie aussi $M^2 = I_n$ ou ${}^tMM = I_n$ donc $M \in O(n)$ et représente ϕ_u ainsi ϕ_u est-il une isométrie vectorielle de E qui, par propriété, conserve le produit scalaire ■
1.5) On a $\phi_u(u) = 2u - u = u$ donc $\boxed{\phi_u(D_u) = D_u}$ □
Puisque ϕ_u est une isométrie vectorielle de E et que D_u est stable par celle-ci, l'orthogonal de D_u, à savoir H_u, l'est aussi ■
1.6) Pour tout $x \in D_u$ (cf 5)) $\phi_u(x) = x$ et, pour tout $x \in H_u$, $\phi_u(x) = -x$ (puisqu'alors $< x|u >= 0$).

On voit donc que ϕ_u est la symétrie orthogonale par rapport à D_u■

2.1) $H^\perp$ est une droite vectorielle, elle est engendrée par $(1,1,1)$ donc une b.on en est $\boxed{a = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}$■

2.2) On dispose (cf préambule) de l'expression analytique de cette projection.
$p : v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \rightarrow < v|a > a = \frac{x+y+z}{3}(1,1,1)$ donc sa matrice dans la base canonique est tout simplement $P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, celle de l'autre projection est $I_3 - P$■

2.3) En vertu du préambule cette matrice est $2P - I_3 = \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}}$■

3.1) Dans une bo.n adaptée à la décomposition $E = \Delta \overset{\perp}{\oplus} \Delta^\perp$ la matrice M de ψ est $diag(1,-1,...,-1)$.
Comme on a $M^2 = {}^tMM = I_n$, ψ est une symétrie qui est aussi une isométrie vectorielle■
3.2 En utilisant 1.5 et 1.6 et prenant u vecteur directeur de Δ, on a $\psi = \phi_u$■

Exercice 4

La continuité (à $x \in \mathbb{R}$ fixé) de $t \in I = [0,1] \rightarrow (1-t^2)^n \cos(xt)$ assure l'existence de la suite $(I_n(x))$.
1) La parité du cosinus donne immédiatement celle des fonctions I_n■
2) On utilise le théorème de dérivation sous le signe intégral dont toutes les hypothèses faibles sont très facilement confirmées.
Occupons nous de la domination de la dérivée partielle suivant le paramètre.
Pour tout réel x, tout $t \in I$, $|\frac{\delta}{\delta x}((1-t^2)^n \cos(xt))| = t(1-t^2)^n|\sin(xt)| \leq 1$.
La fonction $t \in I \rightarrow 1$ est intégrable sur I (car I est **borné**) donc notre théorème peut s'appliquer et prouve que chaque I_n est C^1 sur $\mathbb{R}$ et que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, I'_n(x) = -\int_0^1 t(1-t^2)^n \sin(xt)dt}$■
3) On effectue IPP classique (i.e sur un segment pour une intégrale non généralisée dont l'intégrande se présente comme un produit de fonctions notoirement C^∞)à x et n fixés dans l'expression de $I'_n(x)$, obtenue précédemment.
$I'_n(x) = [\frac{1}{2(n+1)}(1-t^2)^{n+1}\sin(xt)]_0^1 - \frac{x}{2(n+1)}\int_0^1 (1-t^2)^{n+1}\cos(xt)dt$, ce qui permet d'écrire que :
$\boxed{I'_n(x) = -\frac{x}{2(n+1)}I_{n+1}(x)}$■
4) Posons $(H_k) : \forall n \in \mathbb{N}, I_n \in C^k(I)$.
2) validant (H_1), on suppose (H_k) vérifiée pour un entier $k \geq 1$ et donnons nous un entier naturel n.
La question précédente montre alors que I'_n est le produit de fonctions C^k sur $\mathbb{R}$ donc que I_n est, elle, de classe C^{k+1}; la récurrence se pousrsuit bien■
5.1) Par parties à nouveau et pour p entier quelconque :
$I_{p+1}(0) = [t(1-t^2)^{p+1}]_0^1 + 2(p+1)\int_0^1 t^2(1-t^2)^p dt$ puis en remarquant que $t^2 = (t^2-1)+1$, nous obtenons aussi $I_{p+1}(0) = 0 - 0 + 2(p+1)(-I_{p+1}(0) + I_p(0)) \Longleftrightarrow \boxed{I_{p+1}(0) = \frac{2p+2}{2p+3}I_p(0)}$■

5.2) Une gestion classique du pair et de l'impair conduit (puisque $I_0(0) = 1$) à $\boxed{I_n(0) = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}}$, ce pour tout n (les incrédules le vérifieront par récurrence)■
6) Cette somme vaut aussi $\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\int_0^1 t^{2k}dt = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t^2)^n dt$.

Ainsi avec 5.2 $\boxed{\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)k!(n-k)!} = \frac{I_n(0)}{n!} = \frac{2^{2n}n!}{(2n+1)!}}$■

7) Pour tout réel x : $\boxed{\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}}$■

8) Cette question demande plus d'organisation. On fixe l'entier naturel n et le réel x et on pose, pour tout entier k et tout réel $t \in I$, $u_k(t) = (-1)^k \dfrac{(xt)^{2k}}{(2k)!}(1-t^2)^n$. On va appliquer le théorème d'intégration terme à terme sur le segment $[0,1]$ à la série de fonctions $\sum\limits_{k\geq 0} u_k$. Pour cela on note que :

i) Chaque u_k est intégrable sur I car continue sur ce segment.

ii) La série de fonctions $\sum\limits_{k\geq 0} u_k$ converge simplement sur I. En effet en fixant t, il apparaît que la nature de la série $\sum\limits_{k\geq 0} u_k(t)$ est aussi celle de $\sum\limits_{k\geq 0} (-1)^k \dfrac{(xt)^{2k}}{(2k)!}$ qui converge bien par 7).

De plus la somme de la série de fonctions $\sum\limits_{k\geq 0} u_k$ est $t \in I \to (1-t^2)^n \cos(xt)$ et cette fonction est bien continue (donc CM) sur I.

iii) La série $\sum\limits_{k\geq 0} \displaystyle\int_0^1 |u_k|$ converge. Pour cela on remarque que, pour tout entier k:

$\displaystyle\int_0^1 |u_k| = \frac{(x)^{2k}}{(2k)!}\int_0^1 t^{2k}(1-t^2)^n dt \leq \frac{(x)^{2k}}{(2k)!}$. On détecte en $\dfrac{(x)^{2k}}{(2k)!}$ le terme général d'une STP (cf 7)) convergente donc, par comparaison, la condition de Lebesgue est vérifiée.

De tout ceci nous pouvons déduire que :

$I_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 u_k(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}(\int_0^1 t^{2k}(1-t^2)^n dt)x^{2k}$; ce qui montre que I_n est DSE sur $\mathbb{R}$■

9) On retrouve donc 4)■