Feuille d'exercices 18

PROBABILITÉS

1 - ESPACES PROBABILISÉS

Exercice 1. On lance deux dés à 6 faces. Donner la probabilité de chacun des événements suivants :

(a) Les deux dés affichent la même valeur.
(b) On obtient un double 6.
(c) Au moins l'un des deux dés donne 6.
(d) Un seul dé donne 6, ou les deux donnent 3.
(e) La somme des résultats vaut 4.
(f) Les deux chiffres sont de parités opposées.

Exercice 2. Dix paires de chaussures différentes sont rangées dans un placard. On prend au hasard 4 chaussures. Quelle est la probabilité :

(a) d'obtenir deux paires de chaussures ?
(b) d'obtenir au moins une paire de chaussures ?
(c) d'obtenir une et une seule paire de chaussures ?

Exercice 3. Un dé est truqué pour que la probabilité d'obtenir $k \in [\![1, 6]\!]$ soit proportionnelle à k. Déterminer un espace probabilisé modélisant ce lancer.

Exercice 4. Quelle est la probabilité qu'au moins 2 élèves d'une classe de 45 aient la même date d'anniversaire ?

Exercice 5. La probabilité de gagner au Loto est de $\dfrac{1}{N}$, où N est un grand entier. En jouant N fois au Loto, quelle est la probabilité de gagner au moins une fois ? Déterminer la limite de cette probabilité quand $N \to +\infty$.

Exercice 6. Au bout de combien de lancers d'un dé équilibré à 6 faces aura t-on au moins une chance sur deux d'avoir obtenu un 6 ? Même question avec deux dés pour obtenir un double 6.

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On effectue un tirage simultané de p boules dans l'urne.

(a) Soit $k \in [\![p, n]\!]$, et A_k l'événement « le plus grand numéro qui a été tiré est k ». Calculer $\mathbb{P}(A_k)$.
(b) En déduire la formule : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k-1}{p-1} = \binom{n}{p}$.

2 - PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Exercice 8. Une urne contient 8 boules blanches et 2 boules noires. On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne.

(a) Quelle est la probabilité qu'au moins une boule noire figure à l'intérieur du tirage ?
(b) Sachant qu'au moins une boule noire figure dans le tirage, quelle est la probabilité que la première boule tirée soit noire ?

Exercice 9. Une maladie affecte 1 personne sur 1000. On dispose d'un test qui détecte 99% des malades, et qui donne $0,5\%$ de faux positifs. Une personne est testée positive. Quelle est la probabilité qu'elle soit malade ?

Exercice 10. Le bon fonctionnement d'un appareil obéit à la règle suivante : s'il fonctionne au jour $j \in \mathbb{N}$, alors il y a une probabilité $a \in]0, 1[$ qu'il fonctionne encore au jour $j + 1$. S'il est en panne au jour $j \in \mathbb{N}$, alors il y a une probabilité $b \in]0, 1[$ qu'il soit encore en panne au jour $j + 1$. On suppose que l'appareil fonctionne au jour 0. Déterminer la probabilité p_j qu'il fonctionne au jour $j \in \mathbb{N}$.

Exercice 11. On considère N coffres. Avec une probabilité p, un trésor a été placé dans l'un de ces coffres. On a ouvert $N - 1$ coffres sans trouver le trésor. Quelle est la probabilité pour qu'il figure dans le dernier coffre ?

Exercice 12. Au cours d'un procès, deux jurés doivent, indépendamment l'un de l'autre, déclarer si un accusé est coupable ou non coupable. On suppose que la probabilité que l'accusé soit coupable est de 60%. S'il est coupable, alors la probabilité pour chaque juré de le déclarer coupable est de 70% ; s'il est non coupable, alors la probabilité pour chaque juré de le déclarer coupable est de 20%.
L'accusé est déclaré coupable par les deux jurés. Quelle est la probabilité qu'il soit non coupable ?

Exercice 13. Une compagnie d'assurances répartit ses clients en trois classes R_1, R_2 et R_3 : les bons risques (20% des clients), les risques moyens (50%), et les mauvais risques (30%). Les statistiques indiquent que la probabilité pour un client d'avoir un accident au cours de l'année est, selon sa classe, de $0,05$, $0,15$ ou $0,30$ respectivement.

(a) Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population ait un accident dans l'année ?

(b) Si un client n'a pas eu d'accident dans l'année, quel est la probabilité qu'il soit dans la classe R_1 ?

Exercice 14. On s'intéresse à la survie d'une espèce. On suppose que chaque individu de cette espèce a 3 enfants avec la probabilité $\dfrac{1}{8}$, 2 avec la probabilité $\dfrac{3}{8}$, 1 avec la probabilité $\dfrac{3}{8}$, et aucun avec la probabilité $\dfrac{1}{8}$. À l'instant initial, la population est composée d'un seul individu. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note p_n la probabilité pour que l'espèce disparaisse en n générations. Déterminer p_{n+1} en fonction de p_n, et déterminer la limite de la suite (p_n).

3 - Événements indépendants

Exercice 15. Un jeu de 52 cartes comporte 13 cœurs et 4 dames, dont la dame de cœur. On pioche une carte dans le jeu. Les événements « on obtient un cœur » et « on obtient une dame » sont-ils indépendants ? Et si on enlève le roi de trèfle du jeu ?

Exercice 16. On jette deux dés. Soient A l'événement « le premier dé donne 2 » et B l'événement « la somme des dés est égale à 6 ». Les deux événements sont-ils indépendants ?

Exercice 17. On lance n fois une pièce truquée, où la probabilité d'obtenir pile est $\dfrac{1}{3}$. Quelle est la probabilité d'obtenir le premier face au $n^{\text{ème}}$ lancer ?

Exercice 18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ sa décomposition en facteurs premiers. On note $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur $\Omega = \{1, \dots, n\}$.

(a) Soient d un diviseur de n et $D(d)$ l'ensemble de ses multiples dans Ω. Calculer $\mathbb{P}\big(D(d)\big)$.

(b) On note A l'ensemble des entiers de Ω premiers avec n. Montrer que $A = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{r} \overline{D(p_k)}$.

(c) Déterminer le nombre $\varphi(n)$ d'entiers de Ω premiers avec n.