Devoir à la maison n° 11
CORRIGÉ

Exercice 1.

1. Soient $u = (x_1, y_1, z_1)$ et $v = (x_2, y_2, z_2)$ dans $\mathbb{R}^3$ et λ, μ dans $\mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} f(\lambda u + \mu v) & = & \frac{1}{3}\big(2(\lambda x_1 + \mu x_2) - (\lambda y_1 + \mu y_2) - (\lambda z_1 + \mu z_2), \\ & & -(\lambda x_1 + \mu x_2) + 2(\lambda y_1 + \mu y_2) - (\lambda z_1 + \mu z_2), \\ & & -(\lambda x_1 + \mu x_2) - (\lambda y_1 + \mu y_2) + 2(\lambda z_1 + \mu z_2)\big) \\ & = & \frac{1}{3}\big(\lambda(2x_1 - y_1 - z_1) + \mu(2x_2 - y_2 - z_2), \\ & & \lambda(-x_1 + 2y_1 - z_1) + \mu(-x_2 + 2y_2 - z_2), \\ & & \lambda(-x_1 - y_1 + 2z_1) + \mu(-x_2 - y_2 + 2z_2)\big) \\ & = & \lambda \frac{1}{3}(2x_1 - y_1 - z_1, -x_1 + 2y_1 - z_1, -x_1 - y_1 + 2z_1) \\ & & +\mu \frac{1}{3}(2x_2 - y_2 - z_2, -x_2 + 2y_2 - z_2, -x_2 - y_2 + 2z_2) \\ & = & \lambda f(u) + \mu f(v), \end{array}$$

   donc f est linéaire.

2. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - y - z & = & 0 \\ -x + 2y - z & = & 0 \\ -x - y + 2z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x - y & = & 0 \\ y - z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow u = (x, x, x) = x(1, 1, 1),$$

   donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\left((1, 1, 1)\right)$.
   De plus, en notant (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Im}(f) & = & \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) \\ & = & \mathrm{Vect}\left((2, -1, -1), (-1, 2, -1), (-1, -1, 2)\right) \\ & = & \mathrm{Vect}\left((2, -1, -1), (-1, 2, -1)\right) \text{ car } f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = 0_{\mathbb{R}^3}. \end{array}$$

3. D'après la question 2., le noyau de f est une droite de $\mathbb{R}^3$, donc f n'est pas injective, et son image est un plan de $\mathbb{R}^3$, donc f n'est pas surjective. Donc f n'est pas bijective, donc $f \notin GL(\mathbb{R}^3)$.

4. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} f \circ f(u) & = & f\left(\frac{1}{3}(2x - y - z, -x + 2y - z, -x - y + 2z)\right) \\ & = & \frac{1}{3} f\left(\underbrace{2x - y - z}_{X}, \underbrace{-x + 2y - z}_{Y}, \underbrace{-x - y + 2z}_{Z}\right) \\ & = & \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}(2X - Y - Z, -X + 2Y - Z, -X - Y + 2Z) \\ & = & \frac{1}{9}(6x - 3y - 3z, -3x + 6y - 3z, -3x - 3y + 6z) \\ & = & f(u), \end{array}$$

   donc $f \circ f = f$. Donc f est le projecteur sur le plan $F = \mathrm{Im}(f)$ parallèlement à la droite $G = \mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 2.

1. La fonction f est le produit de $x \mapsto e^{-x}$, fonction définie et C^∞ sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \ln(1+ax)$, fonction définie et C^∞ sur $\left]-\frac{1}{a}, +\infty\right[$ si $a > 0$, sur $\left]-\infty, -\frac{1}{a}\right[$ si $a < 0$. Donc $D = \left]-\frac{1}{a}, +\infty\right[$ si $a > 0$, $\left]-\infty, -\frac{1}{a}\right[$ si $a < 0$. Dans tous les cas, f est donc de classe C^∞ en 0.

2. Comme $ax \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on peut écrire : $\forall x \in D$,

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-x}\ln(1+ax) \\ &= \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)\left(ax - \frac{a^2x^2}{2} + \frac{a^3x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}\left((ax)^3\right)\right) \\ &= ax - a\left(1+\frac{a}{2}\right)x^2 + a\left(\frac{1}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a^2}{3}\right)x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3). \end{aligned}$$

3. Comme f est C^∞ en 0, on a d'après la formule de Taylor-Young et le développement limité ci-dessus :
$f''(0) = 0 \Leftrightarrow a\left(1+\frac{a}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $a = -2$, et
$f^{(3)}(0) = 6a\left(\frac{1}{2}+\frac{a}{2}+\frac{a^2}{3}\right) = a(3+3a+2a^2)$, donc $f^{(3)}(0) = 0$ si $a = 0$, $= -10$ si $a = -2$.
Donc 0 est un point d'inflexion de f si et seulement si $a = -2$.