Corrigé Révisions 3 (CCINP)

1 Probabilités

Soit un entier supérieur ou égal à 2. On considère une urne contenant n boules indiscernables et numérotées de 1 à n.
On tire au hasard une boule et on la retire de l'urne avec toutes les boules ayant un numéro supérieur à celui de la boule tirée. On itère l'expérience jusqu'à obtenir une urne vide.
On note X_n la variable aléatoire renvoyant le nombre de tirages réalisés pour vider l'urne.
Pour tout entier naturel $i \in [|1, n|]$, on pourra désigner par B_i l'événement «la boule numéro i est tirée au premier tirage »˙
Comme d'habitude on admet que tout ceci se modélise dans un espace probabilisé approprié $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
1) Trouver la loi de X_2 puis donner son espérance mathématique et sa variance.
2) Déterminer la loi de X_3 et préciser son espérance mathématique.
3) Quel est l'ensemble des valeurs que peut prendre X_n?
4) Que valent $\mathbb{P}(X_n = 1)$ et $\mathbb{P}(X_n = n)$?
5) Prouver que, pour tout $k \geq 2$, on a :
$\mathbb{P}(X_n = k) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=2}^{n} \mathbb{P}(X_{i-1} = k-1)$.
6) En déduire que $\mathbb{E}(X_{n+1}) - \mathbb{E}(X_n) = \dfrac{1}{n+1}$.
7) Exprimer alors $\mathbb{E}(X_n)$ sous forme de somme et donner un équivalent de cette espérance pour $n \to \infty$.
Solution :
1)$X_2(\Omega) = \{1, 2\}$ et l'événement $(X_2 = 1)$ est : on tire en premier lieu la boule 1 (dans une urne ne comporpant que les boules numérotées 1 et 2), ce qui donne (équiprobabilité = indiscernable) $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \dfrac{1}{2}$ dès lors nécessairement $\mathbb{P}(X_2 = 2) = \dfrac{1}{2}\square$
On a immédiatement $\mathbb{E}(X_2) = \dfrac{3}{2}$ puis (H.K)$\mathbb{V}(X_2) = \dfrac{1^2 + 2^2}{2} - (\dfrac{3}{2})^2 = \dfrac{1}{4}\blacksquare$
2) Cette fois $X_3(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ et pareillement l'événement $(X_2 = 1)$ est : on tire en premier lieu la boule 1 dans un sac de trois boules indiscernables donc $\mathbb{P}(X_3 = 1) = \dfrac{1}{3}$.
Occupons nous de l'événement $(X_3 = 3)$ pour des raisons évidentes de facilité de description (lire la suite de l'énoncé).
Celui-ci se résume à tirer successivement les boules 3,2 puis 1. Nommons C_2 l'événement : on tire la boule numéro 2 au second tirage. Il vient donc $(X_3 = 3) = B_3 \cap C_2$ et, par conséquent que : $\mathbb{P}(X_3 = 3) = \mathbb{P}(C_2|B_3)\mathbb{P}(B_3) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$ et, nécessairement, $\mathbb{P}(X_3 = 2) = 1 - \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2}$.
On a aussi $\mathbb{E}(X_3) = \dfrac{11}{6}\blacksquare$
3) Bien sûr cet ensemble est [|1,n|]$\blacksquare$
4) $(X_n = 1)$ est en fait B_1 donc $\mathbb{P}(X_n = 1) = \dfrac{1}{n}$.
L'autre événement consiste à tirer à la successivement les boules n, $n-1$,.....,3,2 et 1. Donc il s'agit d'une suite de tirages équiprobables dans des urnes comportant n boules puis $n-1$ puis.....2 dont on pressent l'indépendance. Ainsi la probabilité serait égale à $\displaystyle\prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n-i} = \frac{1}{n!}$.
Ce procédé un peu rustique mais globalement accepté peut être rendu plus rigoureux en utilisant la formule des probabilités composées (souvent efficace dans des événements chronologiquement structurés). Pour cela on nomme H_i «l'événement au i-ème tirage on tire la boule $n+1-i$ » alors $(X_n = n) = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} H_i$ donc $\mathbb{P}(X_n = n) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(H_i|\bigcap_{j=1}^{i-1} H_j)$. Comme, i étant fixé, $\mathbb{P}(H_i|\displaystyle\bigcap_{j=1}^{i-1} H_j)$ est en fait la probabilité de tirer une

boule parmi $n+1-i$ boules indiscernables, on retrouve le résultat précédent$\blacksquare$
5) On applique la formule des probabilités totales avec $(B_1, ..., B_n)$ comme système complet d'événements, ce qui donne :
$\mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_n = k|B_i)\mathbb{P}(B_i)$.
Mais, $i \geq 2$ étant donné (pour $i = 1$, la probabilité conditionnelle est nulle), $\mathbb{P}(X_n = k|B_i)$ est la probabilité de vider une urne ne contenant plus que les boules numérotées 1,...,i-1 en $k-1$ tirages (puisque le premier tirage a été effectué). Elle vaut donc $P(X_{i-1} = k-1)$, comme $\mathbb{P}(B_i) = \frac{1}{n}$, la formule en vue est bien obtenue$\blacksquare$
6) En revenant à la définition de l'espérance mathématique d'une variable aléatoire finie, en utilisant Q5 et en isolant le cas $k = 1$:
$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}(\sum_{k=2}^{n} k \sum_{i=2}^{n} \mathbb{P}(X_{i-1} = k-1)) = \frac{1}{n}(1 + \sum_{i=2}^{n}(\sum_{k=2}^{n} \mathbb{P}(X_{i-1} = k-1)) + \sum_{i=2}^{n}(\sum_{k=2}^{n}(k-1)\mathbb{P}(X_{i-1} = k-1))$, ce par Fubini.
Donc, en se souvenant que la somme des probas vaut 1 pour chaque X_{i-1} et en reconnaissant leur espérance mathématique, il vient :
$n\mathbb{E}(X_n) = 1 + n - 1 + \sum_{i=2}^{n} \mathbb{E}(X_{i-1}) = n + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_i)$.
Dès lors $(n+1)\mathbb{E}(X_{n+1}) - n\mathbb{E}(X_n) = 1 + \mathbb{E}(X_n)$ soit $\mathbb{E}(X_{n+1}) - \mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{n+1}$$\blacksquare$
7) Par télescopage et puisque $\mathbb{E}(X_1) = 1$, nous avons (confirmé par 1) et 2)) : $\mathbb{E}(X_n) = H_n \sim \ln(n)$, ce pour $n \to \infty$$\blacksquare$

2 Algèbre

On considère les matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
1) Justifier, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable.
2) Exprimer J^2 en fonction de J et en déduire un polynôme annulateur de A.
3) Préciser alors le spectre de A et les dimensions des espaces propres de A.
Soient $P = X^2 - 5X + 4$ et $n \in \mathbb{N}$.
4) A l'aide d'évaluations pertinentes donner le reste de la division euclidienne de X^n par P.
5) Vérifier alors que $A^n = \frac{1}{3}((4^n - 1)A + (4 - 4^n)I_3)$.
6) Déterminer sans le moindre calcul une matrice $Q \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = Q(diag(4, 1, 1))Q^{-1}$.
Solution :
1) A est diagonalisable en tant que matrice symétrique réelle$\blacksquare$
2) Il vient $J^2 = 3J$ puis $(A - I_3)^2 = 3(A - I_3)$ soit $A^2 - 5A + 4I_3 = 0_3$ donc que $P(A) = 0_3$, où $P = X^2 - 5X + 4 = (X - 1)(X - 4)$$\blacksquare$
3) La question précédente montre que $Sp(A) \subset \{1, 4\}$. Soient p et q les multiplicités respectives (en tant que vp de A) de 1 et 4 (en convenant que si l'une ou l'autre de ces valeurs n'est pas vp, celle-ci vaut 0), l'examen de la trace de A donne : $x + 4y = 6$ dont l'unique solution en entiers naturels inférieurs ou égaux à 2 est $p = 2$ et $q = 1$.
Puisque A est diagonalisable les multiplicités trouvées sont aussi les dimensions des sous-espaces propres correpondants$\blacksquare$
4) La dite division euclidienne s'écrit : $X^n = HP + R$, où $R = aX + b$.
En évaluant cette égalité en 1 et 4, racines de P, nous obtenons $1 = a+b$ et $4^n = 4a+b$ qui donne $a = \frac{4^n - 1}{3}$ et $b = frac4 - 4^n3$$\blacksquare$
5) Par évaluation matricielle l'égalité $X^n = HP + R$ devient $A^n = H(A)P(A) + R(A)$ mais $P(A) = 0_3$ d'où $A^n = R(A)$, ce qui avec la question précédente donne la formule voulue$\blacksquare$
6) On remarque que la somme des coefficients sur chaque ligne vaut 4 donc que la colonne $C_1 = {}^t(1, 1, 1)$ est colonne propre associée.
Puisque A est symétrique réelle son autre espace propre $E_1(A) = C_1^{\perp}$, les colonnes $C_2 = {}^t(1, -1, 0)$ et $C_3 = {}^t(1, 0, -1)$ sont dans cet orthogonal et conviennent$\blacksquare$

3 Analyse

Pour $(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, on pose $f(x,t) = \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$.
1) Etablir que, pour tout $x \geq 0$, $t \to f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
2) Etudier, pour $x > 0$, l'intégrabilité sur $\mathbb{R}_+$ de $t \to \dfrac{te^{-xt}}{1+t^2}$.
Désormais on définit $F(x) = \displaystyle\int_0^\infty f(x,t)dt$ pour $x \geq 0$.
3) Prouver que F est continue sur son domaine de définition.
Justifier sobrement que $F(x) \underset{x\to\infty}{\to} 0$.
4) Vérifier que si $a > 0$ alors pour tout $t \to \dfrac{t^2e^{-at}}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
5) Démontrer que F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.
6) Evaluer, pour $x > 0$, $F''(x) + F(x)$.
On note (E) l'équation différentielle : $y'' + y = \dfrac{1}{x}$, où $x > 0$.
7) A l'aide d'une intégration par parties, établir la convergence de $\displaystyle\int_x^\infty \frac{e^{it}dt}{t}$, ce pour tout $x > 0$.
Pour $x > 0$, on pose $G(x) = \displaystyle\int_x^\infty \frac{\sin(t-x)dt}{t}$.
(On pourra observer que $G(x) = \cos(x)\displaystyle\int_x^\infty \frac{\sin(t)dt}{t} - \sin(x)\int_x^\infty \frac{\cos(t)dt}{t}$.)
8) Démontrer que G est solution de (E) puis que $G(x) \underset{x\to\infty}{\to} 0$.
9) Justifier l'existence de deux réels A et B tels que : $\forall x > 0, G(x) - F(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$.
Prouver ensuite (on pourra utiliser les suites $(x_n = 2n\pi)$ et $(y_n = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi)$) que $A = B = 0$.
10) Vérifier que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(t)dt}{t}$ converge.
11) Prouver que, pour $x \to 0^+$, $\displaystyle\int_x^1 \frac{\cos(t)dt}{t} = O(\ln(x))$. En déduire que G possède en 0 une limite finie à préciser.
12) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(t)dt}{t}$.
Solution :
Pour $x \geq 0$, on posera $g_x : t \geq 0 \to f(x,t)$.
1) g_x est continue sur $\mathbb{R}_+$ (donc 0 N'EST PAS UNE BORNE PROBLEMATIQUE) et $\forall t \geq 0, |g_x(t)| \leq \dfrac{1}{1t^2}$, comme $t \to \dfrac{1}{1t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (équivalent Riemann convergent en ∞ et pas de problème en 0), il en va de même, par domination, de g_x, ce pour tout $x \geq 0$■
2) Cette fois x est strictement positif et l'application $h_x : t \geq 0 \to tg_x(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout$t \geq 0$, on a $|h_x(t)| \leq e^{-xt}$ (car $\dfrac{t}{1+t^2} \leq 1$), la fonction majorante étant notoirement intégrable sur $\mathbb{R}_+$, à nouveau par domination, h_x l'est aussi■
3) On emploie le théorème de continuité sous le signe intégral; les hypothèses non essentielles ne posent aucune difficulté.
La domination a été établie dans la solution de 1).
Par majoration de l'intégrande, il vient $0 \leq F(x) \leq \displaystyle\int_0^\infty e^{-xt}dt = \frac{1}{x}$, le théorème des gendarmes permet de conclure■
4) Continue sur $\mathbb{R}_+$ et dominée par $t \to e^{-at}$, où $a > 0$, elle est bien intégrable sur $\mathbb{R}_+$■
5) On applique le théorème de dérivation (à l'ordre deux) sous le signe intégral en observant que :
i) Pour tout $t \geq 0$, $x > 0 \to f(x,t) = \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est de classe C^2.
Par ailleurs $\dfrac{\delta^2}{\delta x^2}f(x,t) = \dfrac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}$.
Les intégrabilités de l'intégrande et de sa dérivée partielle suivant le paramètre ont été établies aux questions 1) et 2).
Quant à la domination de la dérivée d'ordre deux suivant le paramètre, elle s'effectue sur tout ensemble

$[a, \infty[$ via 4).
Ainsi F est bien de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $F''(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2}$■
6) Avec la question précédente et la linéarité des IG convergentes on a :
$\forall x > 0, F''(x) + F(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-xt}dt = \frac{1}{x}$■
7) Ceci a été fait dans votre cours sur les intégrales généralisées■
8) Posons (leur existence provient de 7) via partie réelle et partie imaginaire) pour tout $x > 0$:
$S(x) = \displaystyle\int_x^{\infty} \frac{\sin(t)dt}{t}$ et $C(x) = \displaystyle\int_x^{\infty} \frac{\cos(t)dt}{t}$, où on a posé ($t > 0$) $s(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$ et $c(t) = \dfrac{\cos(t)}{t}$.
On peut voir que (Chasles) que $S(x) = S(1) - \displaystyle\int_1^x s(t)dt$, donc que S est une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $-s$ qui est de classe C^{∞} sur ce même intervalle donc S (resp. C par le même argument) y sont de classe C^2. Par ailleurs on a $S'(x) = -s(x)$ et $C'(x) = -c(x)$, ce pour tout $x > 0$.
Ainsi par opérations algébriques sur de telles fonctions G est aussi deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec ($x > 0$) $G'(x) = -\sin(x)S(x) - \cos(x)s(x) - \cos(x)C(x) + \sin(x)c(x)$ donc en observant que $s'(x) = c(x) - \dfrac{s(x)}{x}$ et $c'(x) = -s(x) - \dfrac{c(x)}{x}$, il vient aussi après simplification $G''(x) = -G(x) + \dfrac{1}{x}$.
Ainsi G est bien solution de (E).
Montrons que $S(x) \to 0$ si $x \to \infty$. Pour cela écrivons à nouveau $S(x) = S(1) - \displaystyle\int_1^x s(t)dt$ et puisque $S(1)$ est la valeur d'une IG convergente, elle est aussi (par définition de la convergence d'une IG) la limite de $\displaystyle\int_1^x s(t)dt$ si $x \to \infty$; ce qui donne le résultat attendu pour S (même justification pour C). Comme les fonctions cosinus et sinus sont bornées, on en déduit bien que $G(x) \underset{x\to\infty}{\to} 0$■
9) L'existence des réels A et B vient de ce que $G - F$ est solution de $y'' + y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Par ailleurs $G - F = A\cos + B\sin$ possède donc une limite nulle en $+\infty$ ce qui entraîne (par voie séquentielle) que si $n \to \infty$:
$A\cos(2n\pi) + B\sin(2n\pi) \to 0$ et $A\cos(\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi) + B\sin(\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi) \to 0$ soit que $A = 0$ et $B = 0$ autrement dit $\boxed{\forall x > 0, F(x) = G(x)}$■
10) La convergence à l'infini a été établie en 7) et en 0 fausse singularité (en notant bien sûr que s, l'intégrande est continue sur $\mathbb{R}_+^*$)■
11) Pour $0 < t \leq 1$, $0 \leq c(t) \leq \dfrac{1}{t}$ donc, par croissance de l'intégrale (en prenant $x \in]0,1]$), nous obtenons : $0 \leq \displaystyle\int_x^1 c(t)dt \leq -\ln(x)$ et, en particulier $\displaystyle\int_x^1 c(t)dt = O(\ln(x))$ si $x \to 0^+$.
Il en résulte que $C(x) = \displaystyle\int_x^1 c(t)dt + C(1) = O(\ln(x))$ si $x \to 0^+$.
Comme $G(x) = -\sin(x)C(x) + \cos(x)S(x) = O(x\ln(x)) + \cos(x)S(x) \underset{x\to 0}{\to} 0 + 1 \times \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$■
12) F et G coincident sur $\mathbb{R}_+^*$ et possédent toutes les deux une limite en 0 (F est continue en 0 d'après 3)) donc ces limites sont égales soit $\boxed{F(0) = \dfrac{\pi}{2} = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt}$■