Corrigé Révisions (CCNIP)

Exercice 1

Dans cet exercice:
E désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.
$\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.
$\mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices inversibles.
On considère l'application f qui, à tout élément P de E, associe le polynôme Q défini par:

$$Q(X) = (2X+1)P(X) - (X^2-1)P'(X)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Soit B un vecteur propre pour f c'est-à-dire un élément non nul de E tel qu'il existe un réel λ satisfaisant à la relation $f(B) = \lambda B$.
   (a) Montrer que B est nécessairement de degré 2.
   (b) On suppose que $\lambda = 3$. Montrer que -1 est racine de B.
   Soit k l'ordre de multiplicité de la racine -1; il existe donc un polynôme A tel que:
   $$B(X) = (X+1)^k A(X) \quad \text{avec : } A(-1) \neq 0$$
   Montrer que $k = 2$ et que A est constant.
   En déduire que $\lambda = 3$ est une valeur propre de f et déterminer les vecteurs propres associés.
   (c) En supposant $\lambda = -1$, étudier de même la multiplicité de la racine 1.
   En déduire que $\lambda = -1$ est valeur propre de f et déterminer les vecteurs propres associés.
   (d) On suppose maintenant que $\lambda \neq 3$ et $\lambda \neq -1$.
   Montrer que -1 et 1 sont des racines de B.
   En déduire une factorisation des polynômes B obtenus, ainsi que la valeur propre associée à B.
3. <u>Etude d'un cas particulier.</u> Soit F le sous-espace vectoriel de E constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à deux et g la restriction de f à F. On désigne par $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de F.
   (a) Montrer que g est un endomorphisme de F.
   (b) Ecrire la matrice A de g relativement à la base $\mathcal{B}$.
   (c) g est-il diagonalisable?
   (d) Déterminer une matrice diagonale D de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice P de $\mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.

   On désigne par commutant d'une matrice B de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels qui commutent avec B.

   (e) Quel est le commutant de D? En déduire celui de A. Vérifier qu'il s'agit d'un sev (noté L) de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ dont on précisera la dimension. Tout élément de F est-il diagonalisable?

Solution: 1) On observe que f est bien à valeurs dans E et sa linéarité provient de celle de la dérivation et de la bilinéarité du produit de deux polynômes■
2) a) Notons $n \geq 0$ le degré de B et $a \neq 0$ son coefficient dominant. On voit que le coefficient du terme en X^{n+1} de $f(B)$ est égal à $(2-n)a$ mais $f(B) = \lambda B$ entraîne que le dégré de $f(B)$ doit être inférieur ou égal

à celui de B donc que $(2-n)a = 0$ et, puisque $a \neq 0$, on a bien $\boxed{\text{n = d°(B) = 2}}$$\blacksquare$
b) Partant de $f(B) - 3B = 0$, on dispose de $(X-1)(2B - (X+1)B') = 0$ soit $2B = (X+1)B'$ ce qui montre que -1 est bien racine de B.
Il s'agit par la suite de montrer que -1 est la seule racine de B. Ecrivons $B = a(X+1)(X+r)$ alors $2B = (X+1)B'$ donne immédiatement $X + r = X + 1\square$.
Nous venons de prouver que si $3 \in Sp(f)$ alors $E_3(f) = Vect((X+1)^2)$; comme $f((X+1)^2) = (2X+1)(X+1)^2 - (2X-2)(X+1)^2 = 3(X+1)^2$, on peut enlever le conditionnel de la précédente assertion$\blacksquare$
c) De $f(B) + B = 0$ on déduit cette fois $2B = (X-1)B'$ et le même argumentaire que précédemment donne que $-1 \in Sp(f)$ et $E_{-1}(f) = Vect((X-1)^2)$$\blacksquare$
d) On constate que $(2X+1-\lambda)B = (X^2-1)B'$ donc que $(3-\lambda)B(1) = 0$ et que $(1+\lambda)B(-1) = 0$, compte tenu de la condition imposée à λ, il vient que 1 et -1 sont racines de B et que si λ est valeur propre de f alors $X^2 - 1$ est vecteur propre associé. On calcule donc l'image par f de ce polynôme et on trouve $((2X+1) - (2X))(X^2-1)$ donc 1 est l'ultime valeur propre de f et son espace propre est $Vect(X^2-1)$$\blacksquare$
3)a) et b) La question se résume à vérifier que F est stable par f, ce qui se montre en prouvant que $f(X^j) \in F$ pour $j \in [|0,2|]$.
Comme $f(1) = 2X+1$, $f(X) = X^2 + X + 1$ et $f(X^2) = X^2 + 2X$, la stabilité requise en découle$\square$
Et la matrice demandée est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$\blacksquare$
c) et d) Oui puisque d'après la question 2) son spectre est $-1, 1, 3$ (ce qui est conforme à la trace de A). Donc en posant $D = diag(-1,1,3)$ et on peut alors prendre (cf les vecteurs propres déterminés en 2))$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$\blacksquare$
e) Par un simple calcul matriciel, on vérifie que le commutant de D est le sev des matrices diagonales $D_3(\mathbb{R})$. Par ailleurs $MA = AM \Leftrightarrow P^{-1}MPD = DP^{-1}MP$ donc $M \in L$ équivaut à $P^{-1}MP$ diagonale. Autrement dit $L = \{P\Delta P^{-1}, \Delta \in D_3(\mathbb{R})\}$. Donc $L = Vect(Pdiag(1,0,0)P^{-1}, Pdiag(0,1,0)P^{-1}, Pdiag(0,0,1)P^{-1})$ est bien un sev de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ et sa dimension est 3. Il est assez évident que tout élément de L est diagonalisable car semblable à une matrice diagonalisable$\blacksquare$

Exercice 2

Soient s un réel strictement supérieur à 1 et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$, $u_n(x) = x^{s-1}e^{-(n+1)x}$.
On pose par ailleurs, toujours pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{x^{s-1}e^{-x}}{1 - e^{-x}}$.
1) Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 0} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et que f en est la somme.
On rappelle que pour $r > 0$ l'intégrale généralisée $\Gamma(r) = \displaystyle\int_0^{\infty} x^{r-1}e^{-x}dx$ est convergente.
2) Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^{\infty} u_n(x)dx$ converge et donner sa valeur en fonction de s, n et Γ.
3) En déduire la convergence de la série $\sum\limits_{n \geq 0} I_n$.
4) Prouver alors en citant avec précision un théorème que :
i) f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
ii) $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx = \Gamma(s)\zeta(s)$.
(NB : $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$)
Solution: 1) On fixe un réel $x > 0$ et on montre que la STP $\sum\limits_{n \geq 0} u_n(x)$ converge. Ce qui est bien le cas puisque la série géométrique de raison $e^{-x} \in]0,1[$ est convergente et, par somme série géométrique, la somme de notre série de fonctions est bien $f$$\blacksquare$
2) Le changement de variable affine $x = \dfrac{t}{n+1}$, où $t > 0$ ne modifiant pas la nature de I_n, il apparaît que I_n est de même nature que $\dfrac{1}{(n+1)^s}\Gamma(s)$ qui converge puisque $s > 1 > 0$. Et ainsi en terme de valeurs cela

donne $\boxed{I_n = \dfrac{1}{(n+1)^s}\Gamma(s)}$ $\blacksquare$

3) Simple utilisation des séries de Riemann d'exposant strictement supérieur à 1$\blacksquare$

4) Il s'agit d'utiliser le théorème d'intégration de Lebesgue à la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.

Nous avons confirmé l'intégrabilité de chaque u_n à la question 2).
La convergence simple de $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ a été validée en 1)
La somme de $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est f qui est bien continue (donc CM) sur $\mathbb{R}_+^*$ (cf 1))
La condition de Lebesgue relève du 3).
Il s'ensuit, par le dit théorème, que :
i) f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
ii) $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}(\int_0^{\infty} u_n(x)dx)$, ce qui donne au vu de ce qui précède $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx = \Gamma(s)\zeta(s)$$\blacksquare$

Exercice 3

On dispose de deux urnes A et B contenant respectivement a et b boules (a et b sont deux entiers naturels non nuls).
On procède alors à l'expérience suivante: on choisit une des urnes pour en extraire une boule que l'on met dans l'autre urne en admettant que la probabilité de choisir l'urne A est q et que la probabilité de choisir B est p avec $p+q=1$ et $p \in]0,1[$.
On répète cette épreuve jusqu'à ce que l'une des urnes soit vide, si cela se produit, ou bien indéfiniment.
On pose $x = \dfrac{q}{p}$.

1. Etude d'une suite récurrente.
   On considère la suite U définie par la relation de récurrence suivante:
   $$\forall n \in \mathbb{N}^* : U_n = pU_{n+1} + qU_{n-1}$$
   U_0 et U_{a+b} étant des réels donnés.
   (a) Prouver que l'on a pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $p(U_{n+1} - U_n) = q(U_n - U_{n-1})$.
   (b) Lorsque $p = q$, montrer que la suite U est une suite arithmétique.
   En déduire U_n en fonction de n, a, b, U_0 et U_{a+b}.
   (c) Lorsque p est différent de q, montrer qu'il existe deux constantes réelles λ et μ telles que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, : U_n = \lambda + \mu x^n$$
   Déterminer U_n en fonction de n, a, b, U_0 et U_{a+b}.
2. Etude de la probabilité de voir l'expérience se terminer
   Soit k un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant a+b$.
   On note E_k l'événement: à partir d'un contenu de k boules dans l'urne A, l'expérience s'arrête parce que l'urne A est vide.
   Ainsi $P(E_0) = 1$ et $P(E_{a+b}) = 0$.
   Et enfin, on note A l'événement: le premier tirage se fait dans A.
   (a) Pour k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant a+b-1$, établir une relation entre $P(E_k)$, $P(E_{k+1})$ et $P(E_{k-1})$.
   (b) i. En utilisant les résultats de la partie consacrée aux suites, calculer la probabilité $P(E_a)$ de voir l'expérience se terminer par le vidage de A.
   ii. Calculer la limite de $P(E_a)$ lorsque b tend vers $+\infty$.
   iii. Pour p différent de q, déterminer la limite de $P(E_a)$ lorsque p tend vers $0,5$.
   (c) Quelle est la probabilité de voir l'expérience se terminer par le vidage de l'urne B?
   (d) Quelle est la probabilité de voir l'expérience se terminer?

3. Etude du nombre moyen de tirages effectués pour voir l'expérience se terminer.
Pour k un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant a+b$, on note X_k la variable aléatoire égale au nombre de tirages qu'il faut effectuer pour vider l'une quelconque des urnes A ou B à partir d'un contenu initial de k boules dans l'urne A. Si l'expérience est sans fin, on pose $X_k = -1$, et alors d'après la question précédente, on sait que $P(X_k = -1) = 0$. On admet que X_k admet une espérance que l'on note $E(X_k)$.
Ainsi $E(X_0) = 0$ et $E(X_{a+b}) = 0$.

 (a) Pour j un entier naturel non nul et $1 \leqslant k \leqslant a+b-1$, montrer que:

$$P(X_k = j) = qP(X_{k-1} = j-1) + pP(X_{k+1} = j-1)$$

 En déduire que $E(X_k) = 1 + qE(X_{k-1}) + pE(X_{k+1})$.

 (b) Pour $p = q$:

 i. Montrer l'existence d'un réel α tel que la variable $Y_k = X_k + \alpha k^2$ ait une espérance qui vérifie:

$$\forall k \geqslant 1 :: E(Y_k) = \frac{1}{2}E(Y_{k+1}) + \frac{1}{2}E(Y_{k-1})$$

 ii. En utilisant le tout début montrer que $E(X_a) = ab$.

 (c) Pour p différent de q.

 i. Montrer l'existence d'un réel β tel que la variable $Z_k = X_k + \beta k$ ait un espérance qui vérifie:

$$\forall k \geqslant 1 :: E(Z_k) = pE(Z_{k+1}) + qE(Z_{k-1})$$

 ii. En utilisant la partie consacrée aux suites montrer que $E(X_a) = \dfrac{1}{p-q}\left(\dfrac{(a+b)(x^a-1)}{x^{a+b}-1} - a\right)$.

 iii. Quelle est la limite de $E(X_a)$ quand b tend vers $+\infty$ dans le cas $p < q$?

On posera N = a+b et on notera ($\star$) la relation de récurrence étudiée en 1).

Solution: 1) Le but de cette question étant d'obtenir une expression de U_n en fonction de n, nous utilisons plutôt la théorie des suites récurrentes linéaires d'ordre 2. Ici l'équation caractéristique est : $pr^2 - r + q = 0$ ayant $1 = p + q$ comme racine évidente l'autre étant égale à x.
Si $p = q$ soit $x = 1$, il existe deux réels u, v tels que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = un + v$ et, avec les contraintes de l'énoncé,$v = U_0$ et $u = \dfrac{U_N - U_0}{N}$.
Sinon il existe deux réels λ, μ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \lambda + \mu x^n$; on trouve alors $\mu = \dfrac{U_N - U_0}{x^N - 1}$ et $\lambda = \dfrac{x^N U_0 - U_N}{x^N - 1}$■
2)a)En notant B l'événement : le premier tirage s'effectue dans l'urne B, il vient (probabilités totales pour le système complet d'événements (A, B)) :
$\mathbb{P}(E_k) = \mathbb{P}(E_k|A) \times q + \mathbb{P}(E_k|B) \times p$.
Comme il est clair que $\mathbb{P}(E_k|A) = \mathbb{P}(E_{k-1})$ et $\mathbb{P}(E_k|B) = \mathbb{P}(E_{k+1})$, la relation obtenue est ($\star$)■
2)b)i) Si $p = 1/2$ alors en impliquant les données $\mathbb{P}(E_0) = 1$ et $\mathbb{P}(E_N) = 0$, il vient (avec 1)) $\boxed{\mathbb{P}(E_a) = \dfrac{b}{a+b}}$.
Sinon $\boxed{\mathbb{P}(E_a) = \dfrac{x^N - x^a}{x^N - 1}}$■
ii) Si $p = 1/2$, on trouve 1.
Sinon deux cas : $q > p$ ou $x > 1$, c'est la même limite, à savoir 1. Si $q < p$ ou $0 < x < 1$, on trouve cette fois x^a■
iii) En se servant de l'équivalent usuel $t^\alpha - 1 \sim \alpha(t-1)$ si $t \to 1$, on trouve $\dfrac{b}{a+b}$ comme limite dans ce cas■
2)c) On se sert du caractère symétrique du jeu et on utilise 2)b)i) avec $a \leftrightarrow b$ et $p \leftrightarrow q$ ce qui donne (en notant F_b notre événement):
Si $p = 1/2$, $\boxed{\mathbb{P}(F_b) = \dfrac{a}{a+b}}$.
Sinon $\boxed{\mathbb{P}(F_b) = \dfrac{x^a - 1}{x^N - 1}}$■

2)d) La probabilité que le jeu se termine est celle de $E_a \cup F_b$ (réunion de deux événements incompatibles) par additivité et les formules précédentes, on voit que celle-ci vaut 1. Autrement dit l'expérience se termine est un événement presque sûr$\blacksquare$

3)a) On utilise à nouveau la formule des probabilités totales dans le même contexte que pour 2)a):
$\mathbb{P}(X_k = j) = \mathbb{P}(X_k = j|A) \times q + \mathbb{P}(X_k = j|B) \times p$ ce qui conduit à la relation voulue.
Dès lors en multipliant par j et en sommant (de $j = 1$ à l'infini (égalité a priori dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$), il vient :
$E(X_k) = qE(X_{k-1}) + pE(X_{k+1}) + p(\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_{k-1} = j-1)) + q(\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_{k+1} = j-1))$ on conclut avec $\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_{k-1} = j-1) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_{k+1} = j-1) = 1$$\blacksquare$

3)b) et c) On voit donc que la suite $(E(X_k))$ satisfait la relation de récurrence : $pV_{k+2} - V_{k+1} + qV_k = -1, k \geq 0$ $(\bigstar)$
On a déjà obtenu la solution générale de la récurrence homogène associée (à savoir $(\star)$) à la question 1). Il nous suffira d'obtenir une solution particulière et par superposition, nous aurons toutes les solutions de $(\bigstar)$; les contraintes probabilistes nous permettront de trouver notre espérance mathématique.
i) $p = 1/2$ alors $(\bigstar)$ équivaut à $V_{k+2} - 2V_{k+1} + V_k = -2$, ce qui peut aussi s'écrire $W_{k+1} - W_k = -2$, où on a posé $W_k = V_{k+1} - V_k$. Ainsi par télescopage $W_n = -2n + W_0$ mais puisque nous cherchons une solution particulière, on peut choisir $W_0 = 0$ dès lors, par télescopage à nouveau, on trouve $V_n = -n^2 - n$ mais comme la suite (n) est aussi solution de $(\star)$, nous proposons $(-n^2)$ comme solution particulière de $(\bigstar)$.
En résumé : il existe deux réels u, v tels que $\forall n, E(X_n) = un + v - n^2$, les contraintes $E_0 = E_N = 0$ donnent $v = 0$ et $u = N$ ainsi $\boxed{E(X_a) = a(a+b) - a^2 = ab}$$\blacksquare$
ii) Sinon, en procédant de même, on trouve que $(\frac{n}{q-p})$ est une solution particulière de $(\bigstar)$ donc il existe deux réels u, v tels que $\forall n, E(X_n) = v + ux^n + \frac{n}{q-p}$, avec $u + v = v + ux^N + \frac{N}{q-p}$ soit $v = -u$ et $u = \frac{N}{(p-q)(x^N - 1)}$.
D'où $\boxed{E(X_a) = \frac{1}{p-q}(\frac{N(x^a - 1)}{x^N - 1} - a)}$$\blacksquare$
iii) Ici $x > 1$ donc la limite cherchée est $\boxed{\frac{a}{q-p}}$