Révisions Niveau 3 : X (Enoncé et corrigé)

Deux estimations de dérivées n-ièmes

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\operatorname{sinc}(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ si $x \neq 0$ et $\operatorname{sinc}(0) = 1$.
1) Etablir que cette fonction est développable en série entière (DSE) sur $\mathbb{R}$.
Pour $x \geq 0$, on pose $\alpha(x) = \cos(\sqrt{x})$.
2)a) Montrer que se prolonge en une unique fonction DSE sur $\mathbb{R}$.
On note encore α ce prolongement.
b) Préciser l'expression de sur $\mathbb{R}$.
3) Démontrer que : $\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}, |\operatorname{sinc}^{(n)}(x)| \leq \dfrac{1}{n+1}$ en remarquant que $\operatorname{sinc}(x) = \displaystyle\int_0^1 \cos(tx)dt$, ce pour tout réel x.
(Cette inégalité est due à Gronwall, 1918).
La suite de l'exercice tend à démontrer une inégalité similaire pour α, redevable à Smirnov (2018).
On note (E) l'équation différentielle : $4xy'' + 2y' + y = 0$ et (P) le problème de Cauchy $\begin{cases} (E) \\ y(0) = 1 \end{cases}$
4) Vérifier que α est l'unique solution sur $\mathbb{R}$, DSE sur $\mathbb{R}$, du problème (P).
5) Prouver que, pour tout $n \geq 1$ et tout réel x :

$$4x\alpha^{(n+1)}(x) + (4n-2)\alpha^{(n)}(x) + \alpha^{(n-1)}(x) = 0$$

.
6) En déduire que, pour tout $n \geq 1$, il existe un réel positif x_n tel que $|\alpha^{(n)}(x_n)| = \sup\limits_{x \geq 0} |\alpha^{(n)}(x)|$.
7) En tirer le résultat de Smirnov : $\forall n \in \mathbb{N}, \sup\limits_{x \geq 0} |\alpha^{(n)}(x)| = \dfrac{n!}{(2n)!}$.
On pourra raisonner par récurrence et distinguer les cas $x_n = 0$ et $x_n > 0$.

Solution

1) En utilisant le DSE (valable sur $\mathbb{R}$) de la fonction sinus, il vient, pour tout réel $x \neq 0$:
$\operatorname{sinc}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$, on constate alors que cette égalité reste vraie pour $x = 0$; ceci montre bien que la fonction sinus cardinal est DSE sur $\mathbb{R}$■
2)a) A l'aide cette fois du DSE de la fonction cosinus, nous avons pour tout $x \geq 0$:
$\alpha(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!}$. Cette égalité montre qu'il existe au plus une fonction DSE sur $\mathbb{R}$, prolongeant α à $\mathbb{R}$ tout entier, à savoir $x \to \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!}$, comme le rayon de convergence de cette série entière est égal à $+\infty$ (toujours par l'égalité ci-dessus), nous avons aussi montré l'existence d'un tel prolongement■
b) Soit $x \leq 0$ alors $\alpha(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{-x})^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch}(\sqrt{-x})$■
3) L'indication (facile à confimer en distinguant $x = 0$ et $x \neq 0$) nous permet de voir la fonction sinus cardinal comme une intégrale à paramètre pour laquelle s'applique le théorème de dérivation successive puisque (travaillant sur le segment $I = [0, 1]$) nous avons pour tout entier n, tout réel x et tout $t \in I$, $|\dfrac{\delta^n}{\delta x^n}(\cos(tx)| = t^n |\cos(tx + n\dfrac{\pi}{2})| \leq 1$.
Ainsi on a, en particulier, $\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}, |\operatorname{sinc}^{(n)}(x)| \leq \displaystyle\int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$■
4) Cherchons les sommes de séries entières $\displaystyle\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ solutions du problème (P) sur $\mathbb{R}$.

Ceci équivaut à trois choses :
i) La série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge pour tout réel x.
ii) $a_0 = 1$.
iii) S, la somme de $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
Reformulons iii) : par dérivation terme à terme valable sur $\mathbb{R}$, nous avons :
$iii) \iff \sum n = 1^{\infty}(4n(n-1)+2n)a_n x^{n-1} + \sum n = 0^{\infty} a_n x^n = 0$ soit, après changement d'indice et regroupement des deux sommes.
$iii) \iff \sum n = 0^{\infty}((2n+2)(2n+1)a_{n+1} + a_n)x^n = 0$.
Ainsi, par unicité des coefficients d'une série entière, nous obtenons que iii) équivaut à :
$\forall n, a_{n+1} = -\dfrac{a_n}{(2n+2)(2n+1)}$ soit $\forall n, a_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{(2n)!}$.
Constatant par cette formule que toutes les séries entières dont les sommes sont solutions de (E) ont un rayon de convergence infini, nous pouvons énoncer que i),ii) et iii) équivalent à $S = \alpha$■
5) Il suffit de dériver $(n-1)$ fois (E) en appliquant la formule de Leibniz■
6) Une fonction continue, positive sur $\mathbb{R}_+$, de limite nulle en $+\infty$, possède un maximum sur $\mathbb{R}_+$ (Classique exo de première année et facile à visualiser).
Nous allons donc vérifier par récurrence que les valeurs absolues des dérivées d'ordre ≥ 1 de α ont une limite nulle en $+\infty$.
Comme pour $x \geq 0, \alpha'(x) = \dfrac{\mathrm{sinc}(\sqrt{x})}{2}$, notre propriété est vraie au rang 1, en redérivant on voit qu'elle aussi vraie au rang 2.
On suppose maintenant qu'elle est satisfaite de l'ordre 1 à l'ordre n (avec $n \geq 2$), la question précédente montre que pour $x > 0$,$|\alpha^{(n+1)}(x)| \leq \dfrac{2n-1}{2x}|\alpha^{(n)}(x)| + \dfrac{1}{4x}|\alpha^{(n-1)}(x)|$.
Notre hypothèse de récurrence et le théorème des gendarmes donnent l'hérédité voulue■
7) C'est évidemment vrai pour $n = 0$ et on suppose que c'est OK au rang $n-1$ pour un $n \geq 1$.
Premier contexte $x_n = 0$: auquel cas $\sup_{x\geq 0}|\alpha^{(n)}(x)| = |\alpha^{(n)}(0)|$ et, par Taylor (cf cours S.E), $\alpha^{(n)}(0) = n! \times (-1)^n \dfrac{1}{(2n)!}$; ce qui fournit l'expression souhaitée (sans utiliser HR).
Sinon $x_n > 0$ et en ce point $\alpha^{(n)}$ présente un extremum global sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^*$ donc sa dérivée est nulle; ainsi en utilisant la relation de la question 5) que l'on spécialise en x_n, il vient $\sup_{x\geq 0}|\alpha^{(n)}(x)| \leq \dfrac{(n-1)!}{(4n-2)(2n-2)!}$, ce par HR.
De ceci on tire donc $\sup_{x\geq 0}|\alpha^{(n)}(x)| \leq \dfrac{n!}{(2n)!} = |\alpha^{(n)}(0)|$, d'où l'égalité souhaitée et la récurrence se poursuit ■