Enoncé et Corrigé de Révisions 4 : Formule d'Euler/Mac-Laurin (X-Mines)

Les diverses parties de ce problème ne sont pas indépendantes ; on pourra donc utiliser pour la résolution d'une question les résultats des questions antérieures *figurant dans l'énoncé.* L'attention des candidats est attirée sur le fait qu'il sera tenu le plus grand compte lors de la correction, de la rigueur des raisonnements et, de manière générale, de la clarté de la rédaction.

1 Polynômes et nombres de Bernoulli

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E_n l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n et à coefficients réels.
On note $\Delta : P \in \mathbb{R}[X] \to P(X) - P(X-1)$; cette application est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
1) Etablir que E_n est stable par Δ.
Préciser noyau et image de Δ_n, l'endomorphisme de E_n induit par Δ.
Δ_n est-il diagonalisable?
2) Démontrer qu'il existe un et un seul élément Q_n de E_{n+1} tel que : $\forall p \in \mathbb{N}^*, Q_n(p) = \sum_{k=0}^{p-1} k^n$
3) Vérifier que Q_n satisfait les égalités : $Q_n(0) = Q_n(1) = 0$.
4) Montrer qu'il existe une suite de rationnels $(a_n)_{n\geq 2}$ telle que l'on ait pour tout $n \geq 2$: $Q_n' + a_n = nQ_{n-1}$.
(*On calculera* $\Delta(Q_n' - nQ_{n-1})$.)
5) On désigne par $\overset{\star}{Q}_n$ le polynôme $Q_n(1-X)$. Comparer $\overset{\star}{Q}_n$ et Q_n.
6) Calculer $Q_{2p}(\frac{1}{2})$ et a_{2p+1} pour $p \in \mathbb{N}^*$ (cette contrainte reste valable jusqu'à la fin de cette partie).
7) Etablir que les polynômes Q_{2p} ne s'annulent sur]0,1[qu'au point $\frac{1}{2}$ et que les polynômes Q_{2p+1} sont de signe constant sur ce même intervalle.
(*Calculer* Q_1, Q_2 *et dresser par récurrence les tableaux de variations de* Q_{2p+1} *et* Q_{2p+2}.)
8) Prouver que a_{2p} n'est pas nul et que le signe de Q_{2p-1} sur]0,1[est celui de $(-1)^p$.
9) Montrer que la suite $(Q_n)_{n\geq 1}$ est entièrement déterminée par son premier terme et les relations $Q_{n+1}'' = (n+1)Q_n'$ et $Q_{n+1}(0) = Q_{n+1}(1) = 0$.
10) On appelle B_p le rationnel positif $(-1)^p a_{2p}$. Calculer les nombres B_1, B_2 et B_3.

2 Formule d'Euler/Mac-Laurin

11) Soient n un entier naturel et $f \in C^{2n+3}(I = [0,1])$ et à valeurs réelles. Montrer l'égalité :
$$f(1)-f(0) = \frac{f'(0)+f'(1)}{2} + \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^p B_p}{(2p)!}(f^{(2p)}(1) - f^{(2p)}(0)) + R_n, \text{ où } R_n = \frac{1}{(2n+1)!}\int_0^1 Q_{2n+1}(x) f^{(2n+3)}(x)dx.$$
On désigne par $\|.\|$ la norme «infinie » sur I.
12) Montrer ensuite que $|R_n| \leq B_{n+1}\dfrac{\left\|f^{(2n+3)}\right\|}{(2n+2)!}$.

3 Généralisation du problème de Bâle

13) Soient $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que $\int_0^1 Q_{2m+1}(t)\cos(2\pi nt)dt = (-1)^m \dfrac{(2m+1)!}{(2\pi n)^{2m+2}}$.
14) Soit N un entier naturel non nul.
Donner une expression intégrale de la somme $\sum_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n^{2m+2}}$.
(*On commencera par établir que* $\cos(\theta) + \cos(2\theta) + \cdots + \cos(N\theta) = \dfrac{\sin((N+\frac{1}{2})\theta)}{2\sin(\frac{1}{2}\theta)} - \dfrac{1}{2}$ *où* θ *désigne un réel*

non multiple entier de 2π.)

15) Montrer que la fonction $\phi : x \in]0,1[\to \dfrac{Q_{2m+1}(x)}{\sin(\pi x)}$ se prolonge en une fonction de classe C^1 sur le segment I.

16) Prouver que si $f \in C^1([a,b])$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\sin(nt)dt \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

17) En déduire (Euler, bien sûr), pour tout entier naturel m, la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m+2}}$.

4 Solution

On pose d'emblée $I = [0,1]$ et $J =]0,1[$.

1) On a sans peine que $d\check{r}(\Delta(P)) \leq d\check{r}(P)$ donc E_n est bien stable par Δ.
Précisons le noyau de Δ (on en déduira par restriction celui de Δ_n).
Soit P dans ce noyau alors $\forall k \in \mathbb{N}, P(k+1) - P(k) = 0$ donc, par télescopage $P(k) - P(0) = 0$, autrement dit le polynôme $P - P(0)$, ayant une infinité de racines, est le polynôme nul et P est constant (i.e $P \in E_0 = Vect(1)$). Inversement tout élément de ce type appartient bien au noyau considéré. $\boxed{Ker(\Delta_n) = Ker(\Delta) = Vect(1)}\square$
Son noyau étant de dimension 1, la formule du rang, appliquée à Δ_n, nous donne $rg(\Delta_n) = n+1-1 = n$. Mais en remarquant que $\Delta(X^n)$ est de degré $\leq n-1$, on voit que l'image de Δ_n est incluse dans E_{n-1} qui est exactement de dimension n. Finalement $\boxed{Im(\Delta_n) = E_{n-1}}\square$
Comme Δ_n abaisse strictement de le degré d'un polynôme non nul, il ne peut admettre que 0 pour valeur propre donc serait l'endomorphisme nul s'il était dz; ceci est absurde puisque $(n \geq 1)$ et $\Delta_n(X) = 1$■

2) Puisque l'image de $\Delta_{n+1} = E_n$, il existe un élément $P \in E_{n+1}$ tel que $(X)^n = \Delta_{n+1}(P)$ (noter qu'à constante près cf 1), P est unique et que son degré vaut $n+1$).
Donc pour tout entier $k \geq 1$, $P(k) - P(k-1) = (k-1)^n$ donc en sommant entre $k=1$ et $k=p$, il vient $P(p) - P(0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} k^n$, ceci pour tout entier naturel non nul p.
Ainsi en posant $Q_n = P - P(0)$, on a prouvé l'existence d'un polynôme satisfaisant aux conditions requises. Donnons nous H un autre candidat à ces exigences alors $H - Q_n$ admet les entiers naturels non nuls comme racines, il est donc le polynôme nul et l'unicité est validée■

3) Par sa caractérisation (et puisque $n \geq 1$), $Q_n(1) = 0$ et par sa définition $Q_n = P - P(0)$, $Q_n(0) = 0$■

4) En suivant l'indication ($n \geq 2$) $\Delta(Q_n' - nQ_{n-1}) = Q_n'(X) - Q_n'(X-1) - nX^{n-1} = (X^n)' - nX^{n-1} = 0$ donc il existe bien un réel a_n tel que $Q_n' - nQ_{n-1} = a_n$ (puisque $Ker(\Delta) = Vect(1)$).
En changeant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{Q}$ rien n'est modifié dans tout ce qui précède, ce qui montre que les polynômes Q_n sont en fait à coefficients rationnels donc la suite (a_n) est, elle aussi, à termes rationnels■

5) Pour que des polynômes soient égaux, ils doivent avoir même coefficient dominant donc nous allons essayer de montrer que $\overset{\star}{Q}_n = (-1)^{n+1}Q$; comme $\Delta(\overset{\star}{Q}_n) = Q_n(1-X) - Q_n(-X) = -\Delta(Q_n)(-X) = -(-X)^n = \Delta((-1)^{n+1}Q_n)$, il existe bien un réel C tel que $\overset{\star}{Q}_n = (-1)^{n+1}Q_n + C$. L'évaluation en 0 de cette égalité (avec Q3) nous donne $C = 0$ et ainsi $\boxed{\overset{\star}{Q}_n = (-1)^{n+1}Q_n}$■

6) A l'aide de la relation précédente spécialisée en 1/2, on trouve $\boxed{Q_{2p}(\frac{1}{2}) = 0}\square$
On a successivement $Q_{2p+1}'(X) + a_{2p+1} = (2p+1)Q_{2p}(X)$ et $Q_{2p+1}'(1-X) + a_{2p+1} = (2p+1)Q_{2p}(1-X)$ mais en vertu de 5) $Q_{2p+1}'(1-X) = -Q_{2p+1}'(X)$ donc en posant $m = Q_{2p+1}'(1/2)$ et en spécialisant nous obtenons $m + a_{2p+1} = 0 = -m + a_{2p+1}$ donc $\boxed{a_{2p+1} = m = 0}$■

7) Là encore nous suivons les indications en déterminant (à l'aide des questions 2) et 3)) $Q_1 = \dfrac{X(X-1)}{2}$ et $Q_2 = \dfrac{X(X-1)(2X-1)}{6}$ qui satisfont bien aux conditions voulues.
Supposons $n \geq 3$ et que pour tout $k \in [|1, n-1|]$ la propriété voulue soit vraie.
Si $n = 2p+2$ et si Q_n s'annulait sur I en dehors des points 0, 1/2 et 1, par le théorème de Rolle sa dérivée s'annulerait au moins 3 fois sur J et sa dérivée seconde au moins deux fois sur J mais celle-ci vaut en vertu de Q4 et Q6 $(2p+2)(2p+1)Q_{2p}$ et ne peut s'annuler (HR) qu'une foid sur J. C'est intenable donc Q_n ne s'annule dans ce cas qu'en 1/2$\square$
Si $n = 2p+1$ et si Q_n n'était pas de signe constant sur J alors ce polynôme s'annulerait trois fois au moins sur I donc sa dérivée (Rolle) deux fois sur J i.e Q_{2p} aurait la même propriété, ce qui est contraire à HR■

8) Si $a_{2p} = 0$, alors par Q4 et Q7, Q_{2p} est monotone sur I, ce qui est absurde car elle n'y est pas nulle.
On voit avec son expression donnée en 7) que Q_1 est négatif sur J et donc (en vertu de Rolle Q_2 devant s'annuler sur J) $a_2 < 0$ Emettons l'hypothèse que a_{2p} soit du signe de $(-1)^p$, ce pour un $p \geq 1$ ce qui équivaut à dire que c'est aussi le signe de Q_{2p-1} sur J (en vertu de 4) et Rolle comme indiqué ci-dessus); on a donc $Q'_{2p}(x) = -a_{2p} + (2p-1)Q_{2p-1}(x)$ et en faisant tendre x vers 0, on voit qu'au voisinage de 0 la dérivée de Q_{2p} est du signe de $(-1)^{p+1}$ donc (puisqu'elle s'annule en 0), Q_{2p} est aussi de ce signe à droite de 0 et, de $Q'_{2p+1} = 2pQ_{2p}$, on déduit la même chose pour Q'_{2p+1} et pour Q_{2p+1} (car nulle en 0), comme cette dernière est de signe constant sur J, notre récurrence se propage laborieusement■
9) On raisonne à nouveau par récurrence en supposant $Q_1, ..., Q_n$ déterminés par les conditions données jusqu'à un rang $n \geq 1$.
Il existe donc un réel (rationnel en fait) C tel que $Q'_{n+1} = (n+1)Q_n + C$ puis en notant H la primitive de $(n+1)Q_n$ nulle en 0, il existe un réel D tel que $Q_{n+1} = H + CX + D$ et, puisque 0 et 1 sont racines de notre polynôme, on arrive à $Q_{n+1} = H - H(1)X$, ce qui prouve que Q_{n+1} est aussi entièrement déterminé■
10) En dérivant Q_2, nous obtenons $\boxed{B_1 = 1/6}$.
De façon plus générale $a_{2p} = H(1)$, où H est la primitive de $2pQ_{2p-1}$ nulle en 0 (cf réponse à 9)).
Noter en outre que $Q_{2p-1} = H$, où H est cette fois est la primitive de $(2p-1)Q_{2p-2}$ nulle en 0.
On récupère ainsi $Q_3 = \dfrac{X^2(X-1)^2}{4}$ puis $H = \dfrac{X^5}{5} - \dfrac{X^4}{2} + \dfrac{X^3}{3}$ donc $\boxed{B_2 = 1/30}$.
On a aussi obtenu $Q_4 = H - H(1)X = \dfrac{X^5}{5} - \dfrac{X^4}{2} + \dfrac{X^3}{3} - \dfrac{X}{30}$ et donc par primitivation de $5Q_4$, nous trouvons $Q_5 = \dfrac{X^6}{6} - \dfrac{X^5}{2} + \dfrac{5X^4}{12} - \dfrac{X^2}{12}$ et $\boxed{B_3 = 1/42}$■
Pour les questions qui suivent on utilise sans vergogne, notamment pour les crochets des IPP, le fait que 1 et 0 sont racines des Q_n.
11) Partons de R_n (pour $n \geq 1$); une première intégration par parties (parfaitement légitime comme les suivantes vu la régularité des fonctions en jeu) conduit à $R_n = -\dfrac{1}{(2n+1)!}\displaystyle\int_0^1 Q'_{2n+1}(x) f^{(2n+2)}(x)dx$.
Mais on sait que $Q'_{2n+1} = (2n+1)Q_{2n}$ donc une seconde intégration par parties donne $R_n = \dfrac{1}{(2n)!}\displaystyle\int_0^1 Q'_{2n}(x) f^{(2n+1)}(x)$
De plus $Q'_{2n} = -a_n + 2nQ_{2n-1}$ soit $R_n = \dfrac{-a_n}{(2n)!}(f^{(2n)}(1) - f^{(2n)}(0)) + R_{n-1}$, ce qui implique le caractère héréditaire de cette formule qu'il nous suffit donc d'initialiser.
La première intégration par partie reste valable pour $n = 0$:
$R_0 = -\displaystyle\int_0^1 Q'_1(x) f^{(2)}(x)dx = -\int_0^1 (x - \frac{1}{2}) f^{(2)}(x)dx$
Avec une seconde IPP :$R_0 = -[(x - \dfrac{1}{2})f'(x)]_0^1 + f(1) - f(0)$, c'est bien ce qui était souhaité■
12) Par inégalité triangulaire $|R_n| \leq \dfrac{\left\| f^{(2n+3)} \right\|}{(2n+1)!}\displaystyle\int_0^1 |Q_{2n+1}|$, ce qui s'écrit aussi puisque Q_{2n+1} est de signe constant sur I $|R_n| \leq \dfrac{\left\| f^{(2n+3)} \right\|}{(2n+1)!}\left|\displaystyle\int_0^1 Q_{2n+1}\right| = \dfrac{\left\| f^{(2n+3)} \right\|}{(2n+2)!}\left|\displaystyle\int_0^1 Q'_{2n+2} + (-1)^{n+1}B_{n+1}\right| = B_{n+1}\dfrac{\left\| f^{(2n+3)} \right\|}{(2n+2)!}$■
13) Il suffit d'appliquer 11) à la fonction $f : t \to \sin(2\pi nt)$■
14) L'obtention de la formule trigonométrique est un classique exo de première année. Dès lors avec la question précédente nous obtenons :
$\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{2m+2}} = (-1)^m \frac{(2\pi)^{2m+2}}{(2m+1)!}\int_0^1 Q_{2m+1}(t)\left(\frac{\sin(\pi(2N+1)t)}{2\sin(\pi t)} - \frac{1}{2}\right)dt$■
15) Il existe $P_m \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q_{2m+1}(x) = P_m(x)(x(1-x)$ il suffit donc de montrer que $\psi : x \in J \to \dfrac{x(1-x)}{\sin(\pi x)}$ se prolonge de façon C^1 à I.
La fonction g définie sur $L =]-1, 1[$ par $g(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = \pi$ est DSE et non nulle sur l'intervalle L donc y est de classe C^∞ donc son inverse aussi; ce qui montre qu'en posant $\psi(0) = \dfrac{1}{\pi}$, ψ est C^1 sur $[0, 1[$, la relation $\psi(1-x) = \psi(x), x \in J$ fait qu'en posant égalemment $\psi(1) = \dfrac{1}{\pi}$, elle l'est aussi sur $]0, 1]$ donc sur I comme voulu■
16) C'est le lemme de Riemann-Lebesgue, exo classique de sup (IPP + inégalité triangulaire)■
17) On récolte les fruits des questions précédentes, et on a $\zeta(2m+2) = (-1)^{m+1}\dfrac{(2\pi)^{2m+2}}{2(2m+1)!}\displaystyle\int_0^1 Q_{2m+1}(t)dt$,

comme $Q_{2m+1} = \dfrac{Q'_{2m+2} + (-1)^{m+1} B_{m+1}}{2m+2}$, il vient $\boxed{\zeta(2m+2) = \dfrac{2^{2m+1}\pi^{2m+2}}{(2m+2)!} B_{m+1}}$ On trouve en particuier avec 10) $\boxed{\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}}$, $\boxed{\zeta(4) = \dfrac{\pi^4}{90}}$ ■