Devoir surveillé n° 6

Durée : 3 heures. Calculatrices non autorisées.
La notation tiendra largement compte de la qualité de la rédaction.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre souhaité.
Les exercices qui ne sont pas traités dans l'ordre doivent être rédigés sur des copies séparées.
Le sujet et le brouillon ne sont pas à rendre. Le barème est indicatif.

Exercice 1. *(6 points)* Soient $n \in \mathbb{N}^*$, puis $f : x \mapsto (x^2-1)^n$, $g : x \mapsto (x+1)^n$ et $h : x \mapsto (x-1)^n$.

1. Justifier que les fonctions f, g et h sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer $g^{(j)}$ et $h^{(j)}$ pour tout $j \in \mathbb{N}$.
3. En déduire $f^{(k)}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.
4. Montrer que, pour tout k dans $[\![0, n-1]\!]$, $f^{(k)}$ s'annule en -1 et en 1.
5. En déduire par récurrence que, pour tout k dans $[\![0, n]\!]$, $f^{(k)}$ s'annule k fois sur $]-1, 1[$.
6. On considère le polynôme $P = (X^2-1)^n$. Que peut-on dire des racines de $P^{(n)}$?

Exercice 2. *(8 points)*

On considère l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2y-2z, x+y-2z, x-y) \end{array} \right.$.

1. (a) Montrer que f est une application linéaire.
   (b) Déterminer le noyau et l'image de f. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
   (c) Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
   (d) Soit p le projecteur sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$. Déterminer $p(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
2. (a) Montrer que $f^3 - f^2 - 2f = 0$.
   (b) On pose $g = \frac{1}{6}(f^2 + f)$ et $h = \frac{1}{3}(f^2 - 2f)$.
   Montrer que g et h sont des projecteurs, et que $f \circ g = 2g$ et $f \circ h = -h$.
   (c) En déduire que : $\forall n \geq 1,\ f^n = 2^n g + (-1)^n h$. En déduire $f^n(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 3. *(6 points)* On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2}$.

1. Soit $g : y \mapsto \dfrac{1}{y-2} + \dfrac{1}{y+1}$.
   (a) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de g.
   (b) Déterminer $g(0,1)$ à 10^{-2} près.
2. En déduire le développement limité à l'ordre 2 en -1 de $\dfrac{1}{f(x)}$.
3. Montrer que f réalise une bijection de $]-1, 1[$ dans $\mathbb{R}$.
   On note f^{-1} la bijection réciproque.
4. Déterminer $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tels que $f^{-1}(x) = a_0 + \dfrac{a_1}{x} + \dfrac{a_2}{x^2} + \underset{x \to +\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Problème. *(14 points)* On considère la fonction $f : x \mapsto e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1+x+x^2}$.

I. 1. Déterminer le domaine de définition de f.

2. Déterminer le domaine de dérivabilité de f, et calculer sa dérivée.

3. Montrer que f' s'annule exactement une fois sur $\mathbb{R}$, en $\alpha \in]1,2[$.
On donne, pour $a = \dfrac{1-\sqrt{13}}{6}$: $2a^3 - a^2 - 2a - 2 \simeq -1,48$.

4. i. Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$, puis un développement asymptotique de f à trois termes en $+\infty$.

ii. En déduire l'existence d'une droite asymptote à la courbe de f en $+\infty$, et déterminer la position relative de la courbe par rapport à cette droite.

iii. Que se passe-t-il en $-\infty$?

5. Tracer la courbe représentative de f.
On donne $\alpha \simeq 1,55$ *et* $f(\alpha) \simeq 4,2$.

II. 1. Montrer que, pour tout entier $n \geq 5$, l'équation $f(x) = n$ admet deux solutions distinctes sur $\mathbb{R}_+^*$.
On note u_n et v_n ces solutions, avec $u_n < \alpha$ et $v_n > \alpha$.

2. Déterminer le sens de variation des suites (u_n) et (v_n).

3. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

III. 1. i. Montrer que : $\forall n \geq 5,\ u_n \ln(n) = 1 + \dfrac{u_n}{2}\ln(1+u_n+u_n^2)$.

ii. En déduire un équivalent simple de u_n quand $n \to +\infty$.

iii. Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $u_n = \dfrac{a}{\ln(n)} + \dfrac{b}{\ln^2(n)} + \dfrac{c}{\ln^3(n)} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{\ln^3(n)}\right)$.

2. i. Déterminer un équivalent simple de v_n quand $n \to +\infty$.

ii. Montrer que : $\forall n \geq 5,\ v_n = ne^{-\frac{1}{v_n}}\left(1+\dfrac{1}{v_n}+\dfrac{1}{v_n^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

iii. En déduire la limite de $v_n - n$ quand $n \to +\infty$.

iv. Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $v_n = n + a + \dfrac{b}{n} + \dfrac{c}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.