Devoir surveillé n° 6
CORRIGÉ

Exercice 1.

1. Les fonctions f, g et h sont polynomiales, donc usuellement de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2. On a directement : $\forall j \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}$,
   - $g^{(j)}(x) = \dfrac{n!}{(n-j)!}(x-1)^{n-j}$ si $j \leq n$, 0 sinon,
   - $h^{(j)}(x) = \dfrac{n!}{(n-j)!}(x+1)^{n-j}$ si $j \leq n$, 0 sinon
3. Soit k dans $[\![0,n]\!]$. On a $f = gh$, donc d'après la formule de Leibniz :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} g^{(j)}(x) h^{(k-j)}(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{n!}{(n-j)!}(x-1)^{n-j} \frac{n!}{(n-k+j)!}(x+1)^{n-k+j}.$$
4. D'après la formule ci-dessus : $\forall k \in [\![0,n-1]\!]$, $f_k(-1) = f_k(1) = 0$.
5. Notons, pour tout k dans $[\![0,n]\!]$, P_k l'assertion « $f^{(k)}$ s'annule au moins k fois sur $]-1,1[$ ».
   P_0 est trivialement vérifiée.
   Soit k dans $[\![0,n-1]\!]$, supposons P_k vérifiée.
   Soient $a_1,\ldots,a_k$ des zéros distincts de $f^{(k)}$ sur $]-1,1[$. Comme :
$$f^{(k)}(-1) = f^{(k)}(a_1) = \cdots = f^{(k)}(a_k) = f^{(k)}(1),$$
   il existe d'après le théorème de Rolle $c_0 \in]-1,a_1[$, $c_1 \in]a_1,a_2[$,..., $c_k \in]a_k,1[$ tels que :
$$\forall j \in [\![0,k]\!],\ f^{(k+1)}(c_j) = (f^{(k)})'(c_j) = 0.$$
   Donc P_{k+1} est vérifiée.
   Par récurrence, P_k est donc vérifiée pour tout k dans $[\![0,n]\!]$.
6. D'après la question précédente, $P^{(n)}$ admet n racines distinctes dans $]-1,1[$.
   Or P est de degré $2n$, donc $P^{(n)}$ est de degré n, donc admet au plus n racines réelles.
   Donc $P^{(n)}$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, et toutes ses racines sont dans $]-1,1[$.

Exercice 2.

1. (a) Soient $u = (x_1,y_1,z_1)$ et $v = (x_2,y_2,z_2)$ dans $\mathbb{R}^3$ et λ,μ dans $\mathbb{R}$, alors :
$$\begin{array}{rcl} f(\lambda u + \mu v) & = & (2(\lambda y_1 + \mu y_2) - 2(\lambda z_1 + \mu z_2), (\lambda x_1 + \mu x_2) + (\lambda y_1 + \mu y_2) - 2(\lambda z_1 + \mu z_2), \\ & & (\lambda x_1 + \mu x_2) - (\lambda y_1 + \mu y_2)) \\ & = & \lambda(2y_1 - 2z_1, x_1 + y_1 - 2z_1, x_1 - y_1) + \mu(2y_2 - 2z_2, x_2 + y_2 - 2z_2, x_2 - y_2) \\ & = & \lambda f(u) + \mu f(v), \end{array}$$
   donc f est compatible avec la combinaison linéaire. Donc f est une application linéaire.

(b) Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On a :

$$u\in\mathrm{Ker}(f)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}2y-2z&=&0\\x+y-2z&=&0\\x-y&=&0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}y&=&z\\x&=&z\end{array}\right.\Leftrightarrow u=(z,z,z)=z\cdot(1,1,1),$$

donc $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Vect}\,((1,1,1))$. $\mathrm{Ker}(f)$ est donc une droite de $\mathbb{R}^3$; comme $\mathrm{Ker}(f)\neq\{0_{\mathbb{R}^3}\}$, f n'est pas injective, donc n'est pas bijective.
De plus, $f(u)=x\cdot(0,1,1)+y\cdot(2,1,-1)+z\cdot(-2,-2,0)$, donc $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}(\underbrace{(0,1,1)}_{u_1},\underbrace{(2,1,-1)}_{u_2},\underbrace{(-2,-2,0)}_{u_3})$.
Comme $u_1+u_2+u_3=0_{\mathbb{R}^3}$, on peut simplifier : $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}\,(u_1,u_2)$. Comme u_1 et u_2 sont non colinéaires, $\mathrm{Im}(f)$ est un plan de $\mathbb{R}^3$. Donc f n'est pas surjective.

(c) Notons $v=(1,1,1)$. Montrons que (u_1,u_2,v) est une famille libre : soient $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$ tels que $\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3v=0_{\mathbb{R}^3}$. Alors :

$$\left\{\begin{array}{rcl}2\lambda_2+\lambda_3&=&0\\\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3&=&0\\\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3&=&0\end{array}\right.\underset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{\text{donc}}\left\{\begin{array}{rcl}\lambda_3&=&0\\\lambda_1+\lambda_3&=&0\\\lambda_2&=&0\end{array}\right.\text{ donc }\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0.$$

donc (u_1,u_2,v) est libre, donc $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont en somme directe. De plus, les vecteurs u_1, u_2 et v sont non coplanaires, donc (u_1,u_2,v) engendrent $\mathbb{R}^3$. Donc $\mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^3$.
Donc Ker(f) et Im(f) sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

(d) Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{array}{rcl}u=\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3v&\Leftrightarrow&\left\{\begin{array}{rcl}2\lambda_2+\lambda_3&=&x\\\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3&=&y\\\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3&=&z\end{array}\right.\\&\underset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{\Leftrightarrow}&\left\{\begin{array}{rcl}2\lambda_2+\lambda_3&=&x\\\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3&=&y\\-2\lambda_2&=&z-y\end{array}\right.\\&\Leftrightarrow&\left\{\begin{array}{rcl}\lambda_3&=&x-y+z\\\lambda_1+\lambda_3&=&\frac12y+\frac12z\\\lambda_2&=&\frac12y-\frac12z\end{array}\right.\\&\Leftrightarrow&\left\{\begin{array}{rcl}\lambda_3&=&x-y+z\\\lambda_1&=&-x+\frac32y-\frac12z\\\lambda_2&=&\frac12y-\frac12z\end{array}\right.,\end{array}$$

donc

$$\begin{array}{rcl}u&=&\left(-x+\dfrac32y-\dfrac12z\right)u_1+\left(\dfrac12y-\dfrac12z\right)u_2+(x-y+z)\,v\\&=&\underbrace{(y-z,-x+2y-z,-x+y)}_{\in\mathrm{Im}(f)}+\underbrace{(x-y+z,x-y+z,x-y+z)}_{\in\mathrm{Ker}(f)},\end{array}$$

donc $p(x,y,z)=(y-z,-x+2y-z,-x+y)$.

2. (a) Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{array}{rcl}f^2(u)&=&f\left(\underbrace{2y-2z}_{X},\underbrace{x+y-2z}_{Y},\underbrace{x-y}_{Z}\right)\\&=&(2Y-2Z,X+Y-2Z,X-Y)\\&=&(4y-4z,-x+5y-4z,-x+y),\end{array}$$

puis

$$\begin{array}{rcl} f^3(u) & = & f\left(\underbrace{4y-4z}_{X}, \underbrace{-x+5y-4z}_{Y}, \underbrace{-x+y}_{Z}\right) \\ & = & (2Y-2Z, X+Y-2Z, X-Y) \\ & = & (8y-8z, x+7y-8z, x-y), \end{array}$$

donc :

$$\begin{array}{rcl} (f^3-f^2-2f)(u) & = & (8y-8z, x+7y-8z, x-y)-(4y-4z, -x+5y-4z, -x+y) \\ & & -2(2y-2z, x+y-2z, x-y) \\ & = & (0,0,0), \end{array}$$

d'où $f^3-f^2-2f=0$.

(b) On a $f^3=f^2+2f$, puis $f^4=f^3+2f^2=3f^2+2f$, donc :

$$\begin{array}{rcl} g\circ g & = & \frac{1}{36}(f^2+f)\circ(f^2+f) \\ & = & \frac{1}{36}\left(f^4+2f^3+f^2\right) \\ & = & \frac{1}{36}\left(6f^2+6f\right) \\ & = & g, \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} h\circ h & = & \frac{1}{9}(f^2-2f)\circ(f^2-2f) \\ & = & \frac{1}{9}\left(f^4-4f^3+4f^2\right) \\ & = & \frac{1}{9}\left(3f^2-6f\right) \\ & = & h, \end{array}$$

donc g et h sont des projecteurs, et :

$$\begin{array}{rcl} f\circ g & = & \frac{1}{6}(f^3+f^2) \\ & = & \frac{1}{6}(2f^2+2f) \\ & = & 2g, \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f\circ h & = & \frac{1}{3}(f^3-2f^2) \\ & = & \frac{1}{3}\left(-f^2+2f\right) \\ & = & -h. \end{array}$$

(c) On a : $2g-h=\frac{1}{3}(f^2+f)-\frac{1}{3}(f^2-2f)=f$, donc l'égalité voulue est vraie au rang 1. Soit $n\geq 1$, supposons-la vraie au rang n. Alors, d'après les identités ci-dessus :

$$f^{n+1}=2^n f\circ g+(-1)^n f\circ h=2^{n+1}g+(-1)^{n+1}h,$$

donc l'égalité est vraie au rang $n+1$. Par récurrence, elle est donc vraie pour tout $n\geq 1$.
Soient $n\geq 1$ et $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on a donc :

$$\begin{array}{rcl} f^n(u) & = & 2^n g(u)+(-1)^n h(u) \\ & = & \frac{2^{n-1}+(-1)^n}{3}f^2(u)+\frac{2^{n-1}-2(-1)^n}{3}f(u) \\ & = & \frac{2^{n-1}+(-1)^n}{3}(4y-4z, -x+5y-4z, -x+y) \\ & & +\frac{2^{n-1}-2(-1)^n}{3}(2y-2z, x+y-2z, x-y) \\ & = & \left(2^n y-2^n z, -(-1)^n x+(2^n+(-1)^n)y-2^n z, -(-1)^n x+(-1)^n y\right). \end{array}$$

Exercice 3.

1. (a) On a usuellement : $\dfrac{1}{y+1} = 1 - y + y^2 - y^3 + \underset{y\to 0}{o}(y^3)$, et :
$$\frac{1}{y-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{y}{2}} = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{y}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{y^3}{8} + \underset{y\to 0}{o}(y^3)\right),$$
donc :
$$g(y) = \frac{1}{2} - \frac{5}{4}y + \frac{7}{8}y^2 - \frac{17}{16}y^3 + \underset{y\to 0}{o}(y^3).$$

(b) On applique la formule de Taylor-Lagrange à g à l'ordre 1 entre 0 et $0,1$, ce qui est licite puisque g est usuellement C^∞ sur $[0;0,1]$, donc est en particulier C^1 sur $[0;0,1]$ et deux fois dérivable sur $]0;0,1[$. Il existe donc $c \in]0;0,1[$ tel que :
$$g(0,1) = \frac{1}{2} - \frac{5}{4} \times 0,1 + g''(c) \times \frac{0,1^2}{2!}.$$
Or g'' est positive et décroissante sur $[0;0,1]$, donc $\left|\dfrac{g''(c)}{2!}\right| \leq \dfrac{g''(0)}{2!} = \dfrac{7}{8}$. Donc :
$$g(0,1) = \frac{1}{2} - \frac{5}{4} \times 0,1 = 0,375 \quad \text{à } \frac{7}{8} \times 0,1^2 \leq 10^{-2} \text{ près.}$$

2. On pose $y = x+1$. On a $y \underset{x\to -1}{\longrightarrow} 0$, donc :
$$\begin{aligned}
\frac{1}{f(x)} &= \frac{1}{\frac{1}{y-2} + \frac{1}{y} + \frac{1}{y+1}} \\
&= \frac{y}{1 + yg(y)} \\
&= \frac{y}{1 + \frac{y}{2} + \underset{y\to 0}{o}(y)} \\
&= y\left(1 - \frac{y}{2} + \underset{y\to 0}{o}(y)\right) \\
&= y - \frac{y^2}{2} + \underset{y\to 0}{o}(y^2) \\
&= (x+1) - \frac{(x+1)^2}{2} + \underset{x\to -1}{o}\left((x+1)^2\right).
\end{aligned}$$

3. La fonction f est usuellement dérivable sur $]-1,1[$, avec :
$$\forall x \in]-1,1[, \quad f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2} < 0.$$
Donc f est strictement décroissante sur $]-1,1[$. De plus, f est continue donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires : $f(]-1,1[) = \left]\lim\limits_{x\to 1^-} f(x), \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)\right[= \mathbb{R}$.
Donc, d'après le théorème de la bijection monotone, f est bijective de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$.

4. On a : $f(x) \underset{x\to -1}{\longrightarrow} +\infty$. D'après la question 2, on a donc : $\forall x \in]-1,1[$,
$$\begin{aligned}
x &= f^{-1}\left(f(x)\right) \\
&= a_0 + \frac{a_1}{f(x)} + \frac{a_2}{f(x)^2} + \underset{x\to -1}{o}\left(\frac{1}{f(x)^2}\right) \\
&= a_0 + a_1(x+1) - \frac{a_1}{2}(x+1)^2 + a_2(x+1)^2 + \underset{x\to -1}{o}\left((x+1)^2\right) \\
&= a_0 + a_1(x+1) + \left(a_2 - \frac{a_1}{2}\right)(x+1)^2 + \underset{x\to -1}{o}\left((x+1)^2\right),
\end{aligned}$$

donc, par identification : $\left\{\begin{array}{rcl} a_0+1 & = & 0 \\ a_1 & = & 1 \\ a_2-\frac{a_1}{2} & = & 0 \end{array}\right.$, c'est-à-dire : $\left\{\begin{array}{rcl} a_0 & = & -1 \\ a_1 & = & 1 \\ a_2 & = & \frac{1}{2} \end{array}\right.$. On a donc :

$$f^{-1}(x) = -1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Problème.

I. 1. La fonction f est définie lorsque x est non nul et $1+x+x^2 \geq 0$. Or le trinôme $1+x+x^2$ a pour discriminant $1^2-4=-3<0$ et pour coefficient dominant $1>0$, donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ 1+x+x^2>0$. Donc f a pour domaine de définition $\mathbb{R}^*$.

2. La fonction f est dérivable lorsque x est non nul et $1+x+x^2>0$. D'après l'étude ci-dessus, f a donc pour domaine de dérivabilité $\mathbb{R}^*$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1+x+x^2}+e^{\frac{1}{x}}\frac{1+2x}{2\sqrt{1+x+x^2}} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{2x^2\sqrt{1+x+x^2}}(2x^3-x^2-2x-2).$$

3. On pose $g : x \mapsto 2x^3-x^2-2x-2$. Le signe de f' est donc celui de g. La fonction g est usuellement dérivable sur $\mathbb{R}$, avec : $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = 6x^2-2x-2 = 2(3x^2-x-1)$. Ce dernier trinôme a pour discriminant $(-1)^2+4\times 3 = 13 > 0$, donc pour racines $r_{1,2} = \dfrac{1\pm\sqrt{13}}{6}$. La fonction g est croissante sur $]-\infty, r_1]$, décroissante sur $[r_1, r_2]$ et croissante sur $[r_2, +\infty[$. On a $g(r_1) \simeq -1,48$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires la fonction g, et donc f', s'annule donc exactement une fois, en $\alpha \in \mathbb{R}$. Comme $g(1) = -3 < 0$ et $g(2) = 6 > 0$, $\alpha \in]1, 2[$.

4. i. On a $e^{\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $\sqrt{1+x+x^2} = x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}} \underset{x\to+\infty}{\sim} x$, donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$. Plus précisément :

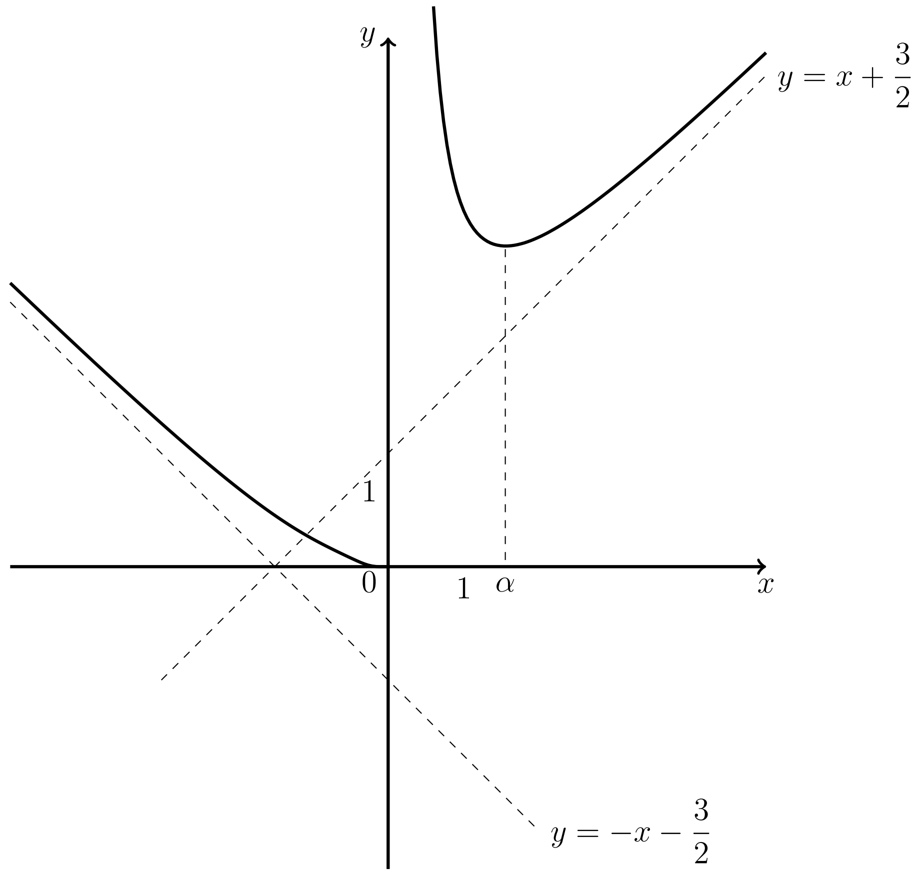
$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\times x\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{1}{8x^2}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= \left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\times\left(x+\frac{1}{2}+\frac{3}{8x}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= x+\frac{3}{2}+\frac{11}{8x}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

ii. D'après le calcul ci-dessus, la courbe de f a pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation $y = x+\dfrac{3}{2}$. Comme $f(x)-\left(x+\dfrac{3}{2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{11}{8x} > 0$, la courbe est au-dessus de son aymptote.

iii. En $-\infty$, on a $\sqrt{1+x+x^2} = -x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}$. Par suite : $f(x) = -x-\dfrac{3}{2}-\dfrac{11}{8x}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

La courbe de f a donc pour asymptote en $-\infty$ la droite d'équation $y = -x-\dfrac{3}{2}$. Comme $f(x)-\left(-x-\dfrac{3}{2}\right) \underset{x\to-\infty}{\sim} -\dfrac{11}{8x} > 0$, la courbe est au-dessus de son aymptote.

5.



II. 1. Soit $n \geq 5$. On a vu que f est strictement décroissante sur $]0, \alpha]$ puis strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$. Comme f est de plus continue et que $f(\alpha) \simeq 4,2$, d'après le théorème de la bijection monotone, l'équation $f(x) = n$ admet exactement une solution sur $]0, \alpha[$ et une solution sur $]\alpha, +\infty[$.

2. Par définition : $\forall n \geq 5,\ f(u_n) = f(v_n) = n$. Comme f est strictement décroissante sur $]0, \alpha[$, la suite (u_n) est donc décroissante. De même, la suite (v_n) est croissante.

3. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc converge vers $l \geq 0$ d'après le théorème de la limite monotone. Comme f est continue, le passage à la limite $n \to +\infty$ dans l'égalité $f(u_n) = n$ montre que $l > 0$ est absurde. Donc $l = 0$. De même, (v_n) est croissante, donc tend vers $l' \geq \alpha$ ou diverge vers $+\infty$. La convergence vers l' est de même absurde, donc $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

III. 1. i. Soit $n \geq 5$. Par définition : $e^{\frac{1}{u_n}} \sqrt{1 + u_n + u_n^2} = n$, donc, par passage au logarithme : $\frac{1}{u_n} + \frac{1}{2} \ln\left(1 + u_n + u_n^2\right) = \ln n$, ce qui est la formule voulue.

ii. Comme $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, d'après la formule précédente : $u_n \ln(n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$, donc $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\ln n}$.

iii. On a déjà $a = 1$. De plus :

$$u_n - \frac{1}{\ln n} = \frac{u_n}{2\ln(n)} \ln(1 + u_n + u_n^2) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{2\ln(n)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2\ln^3(n)},$$

donc $b = 0$ et $c = \frac{1}{2}$:

$$u_n = \frac{1}{\ln(n)} + \frac{1}{2\ln^3(n)} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{\ln^3(n)}\right).$$

2. i. Pour tout $n \geq 5$, $f(v_n) = n$. Or $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc, d'après la question I.4. : $f(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

ii. Soit $n \geq 5$. Par définition : $n = e^{\frac{1}{v_n}}\sqrt{1+v_n+v_n^2} = v_n e^{\frac{1}{v_n}}\sqrt{1+\frac{1}{v_n}+\frac{1}{v_n^2}}$, d'où la formule.

iii. On a : $e^{-\frac{1}{v_n}} = 1 - \frac{1}{v_n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{v_n}\right)$ et $\left(1+\frac{1}{v_n}+\frac{1}{v_n^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2v_n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{v_n}\right)$, donc :

$$v_n = n\left(1-\frac{1}{v_n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{v_n}\right)\right)\left(1-\frac{1}{2v_n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{v_n}\right)\right) = n - \frac{3n}{2v_n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{n}{v_n}\right),$$

et donc : $v_n - n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{3n}{2v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{3}{2}$.

iv. On a déjà $a = -\frac{3}{2}$, et donc : $v_n = n - \frac{3}{2} + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$. On a donc :

$$\frac{1}{v_n} = \frac{1}{n}\frac{1}{1-\frac{3}{2n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{n}\left(1+\frac{3}{2n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n}+\frac{3}{2n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

donc :

$$e^{-\frac{1}{v_n}} = 1 - \left(\frac{1}{n}+\frac{3}{2n^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{3}{2n^2}\right)^2 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

et :

$$\left(1+\frac{1}{v_n}+\frac{1}{v_n^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(1+\frac{1}{n}+\frac{5}{2n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2n} - \frac{7}{8n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

d'où :

$$\begin{aligned} v_n &= n\left(1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1-\frac{1}{2n}-\frac{7}{8n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= n - \frac{3}{2} - \frac{11}{8n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

et donc $b = -\frac{11}{8}$.

Pour trouver c, on recommence à l'ordre suivant : $\frac{1}{v_n} = \frac{1}{n} + \frac{3}{2n^2} + \frac{29}{8n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$, donc : $e^{-\frac{1}{v_n}} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{55}{24n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$, et : $\left(1+\frac{1}{v_n}+\frac{1}{v_n^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2n} - \frac{7}{8n^2} - \frac{7}{4n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$, d'où :

$$v_n = n - \frac{3}{2} - \frac{11}{8n} - \frac{8}{3n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$