Feuille d'exercices 19
DIMENSION

1 - ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $u = (1, 0, 2)$, $v = (1, 1, 2)$, $w = (1, 2, 2)$, $t = (2, 2, 2)$. Montrer que la famille (u, v, w, t) est génératrice de $\mathbb{R}^3$, et en extraire une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}^4$, on pose $u = (1, 1, 1, 1)$ et $v = (1, 1, -1, -1)$. Montrer que la famille (u, v) est libre, et la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 3. Dans $E = \mathbb{R}^4$, soient $u = (1, -1, -1, -1)$, $v = (2, 0, 2, 0)$ et $w = (-1, -1, 2, -1)$.
(a) Montrer que la famille $\mathcal{F} = (u, v, w)$ est libre.
(b) Soit $G = \{(x, y, z, t) \in E \mid y = t\}$. Montrer que $G = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.
(c) Compléter $\mathcal{F}$ en une base de E.

Exercice 4. Soient E et F deux espaces de dimensions finies n et p. Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \ldots, f_p)$ une base de F.
(a) Montrer que la famille $\mathcal{F} = ((e_1, 0_F), \ldots, (e_n, 0_F), (0_E, f_1), \ldots, (0_E, f_p))$ est une base de $E \times F$.
(b) En déduire la dimension de $E \times F$.

2 - DIMENSION ET SOUS-ESPACES VECTORIELS

Exercice 5. Déterminer une base et la dimension des espaces vectoriels suivants :

(a) $E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 3y = 0\}$,
(b) $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 3z = 0\}$,
(c) $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z = x+y+z = 0\}$,
(d) $E_4 = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a + d = 0\}$,
(e) $E_5 = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ géométrique de raison $2\}$,
(f) $E_6 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P(2) = 0\}$,
(g) $E_7 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 0\}$,
(h) $E_8 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y = 2z = 4t\}$.

Exercice 6. Dans $E = \mathbb{R}^4$, on pose $u = (1, 2, 1, 0)$, $v = (0, 1, 2, 1)$, puis $F = \mathrm{Vect}(u, v)$ et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = t - z$ et $x - z + 2t = 0\}$. Montrer que $F = G$.

Exercice 7. Dans $E = \mathbb{R}^4$, soient $F = \{(x, y, z, t) \in E \mid x + 3y + 4z - 5t = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}\,((-2, 2, 0, 3))$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

Exercice 8. Dans $M_n(\mathbb{K})$, soient S et A respectivement le sous-espace vectoriel des matrices symétriques et celui des matrices antisymétriques.
(a) Déterminer les dimensions de S et A.
(b) Montrer que S et A sont supplémentaires dans $M_n(\mathbb{K})$.

Exercice 9. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. On appelle *hyperplan* de E tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$.
(a) Soit H un hyperplan de E, et soit $u_0 \in E \setminus H$. Montrer que $\mathrm{Vect}(u_0)$ est un supplémentaire de H dans E.
(b) Soient H et H' deux hyperplans de E non confondus. Montrer que $\dim(H \cap H') = n - 2$.

3 - Rang et applications linéaires

Exercice 10. Déterminer les dimensions du noyau et l'image des applications linéaires suivantes :

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (x + y, x - y, x + y)$,

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x - y, -3x + 3y)$,

(c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (-2x + y + z, x - y, x - 2y + z)$,

(d) $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M + {}^tM$,

(e) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie par $f(x, y, z) = (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z)$,

(f) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z + i\overline{z}$,

(g) $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définie par $f(P) = P - (X + 1)P'$,

(h) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (x + y, x + 2ay, z)$, où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 11. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ définie par : $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ f(x_1, \ldots, x_n) = (x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1)$. Déterminer le rang de f puis de $g = \mathrm{Id} - f$.

Exercice 12. Soit φ l'application définie, pour toute fonction $y \in C^2(\mathbb{R})$, par $\varphi(y) = y'' - 4y' + 20y$.

(a) Montrer que φ est une application linéaire de $C^2(\mathbb{R})$ dans $C^0(\mathbb{R})$.

(b) Déterminer le noyau de φ.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n, et soit $\psi : E \to E$ définie par : $\forall y \in E,\ \psi(y) = \varphi(y)$. Justifier que ψ est bien définie, et montrer que c'est un automorphisme de E.

Exercice 13. Soit u un endomorphisme de rang 1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u^2 = \lambda u$.

Exercice 14. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant : $f \circ f = 3f - 2\mathrm{Id}_E$.

(a) Montrer que $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E)$ et que $\mathrm{Im}(f - 2\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$.

(b) Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E)$.

Exercice 15. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que :

$$|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \leq \mathrm{rg}(f + g) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g).$$

Exercice 16. Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f \circ g + g \circ f = \mathrm{Id}_E$. Montrer que n est pair.

Exercice 17. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.

(a) Montrer que n est pair si et seulement s'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)$.

(b) Montrer dans ce cas que, pour un tel u, il existe une base de E de la forme $(e_1, \ldots, e_p, u(e_1), \ldots, u(e_p))$.

Exercice 18. Soient E un espace vectoriel de dimension finie n, puis F et G des sous-espaces vectoriels de E. Donner une condition nécessaire et suffisante sur F et G pour qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{Im}(u) = F$ et $\mathrm{Ker}(u) = G$.