Devoir à la maison n° 12

Exercice 1. Une compagnie aérienne étudie l'évolution des réservations sur l'un de ses vols. Elle constate que l'état d'une place donnée évolue ainsi : elle est libre au jour 0 (jour d'ouverture des réservations) puis, si elle est libre au jour n, il y a 4 chances sur 10 que quelqu'un la réserve au jour $n+1$; par contre, si elle est réservée au jour n, il y a 1 chance sur 10 que la réservation soit annulée au jour $n+1$.
On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n l'événement « la place est réservée au jour n », puis $p_n = \mathbb{P}(X_n)$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.
2. En déduire p_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer la limite de p_n quand $n \to +\infty$. Interpréter.

Exercice 2. Au début du XX$^{\text{ème}}$ siècle, les travaux de Gregor Mendel, publiés en 1866, sont redécouverts. Selon Mendel, tout organisme hérite de deux *allèles*, un de chaque parent, pour chaque trait phénotypique ; certains allèles sont *dominants* et d'autres *récessifs*. Par exemple, pour le trait “couleur des yeux”, l'allèle “brun” est dominant et l'allèle “bleu” est récessif. Les personnes disposant des allèles brun-brun, brun-bleu ou bleu-brun ont donc les yeux bruns, tandis que les personnes disposant des allèles bleu-bleu ont les yeux bleus.

Cette théorie ne fait pas immédiatement l'unanimité : selon George U. Yule, professeur de statistiques à l'Université de Cambridge, les allèles récessifs devraient disparaître au fil des générations, ce qui n'est pas le cas en pratique. En 1908, ses collègues Godfrey H. Hardy et Reginald C. Punnett, respectivement professeurs de mathématiques et de biologie, discutent, en marge de leurs parties de cricket, de ce problème. Le 5 avril, Hardy écrit la lettre suivante :

> À l'éditeur de *Science* : Je suis réticent à l'idée de m'immiscer dans un débat au sein duquel je n'ai pas d'expertise, et j'aurais pu m'attendre à ce que l'observation très élémentaire que je souhaite faire soit bien connue des biologistes. Cependant, certaines remarques de M. Yule, sur lesquelles M. Punnett a attiré mon attention, indiquent qu'elle peut être utile. [...]
>
> Supposons que Aa soit une paire de traits mendéliens, A étant dominant, et que dans une génération les nombres d'[homozygotes] dominants (AA), d'hétérozygotes (Aa) et d'[homozygotes] récessifs (aa) soient en proportion p, $2q$, r. Supposons enfin que le nombre [d'individus] soit assez grand pour que l'accouplement puisse être considéré comme aléatoire, les sexes comme uniformément répartis selon les trois catégories, et tous [les individus] comme également féconds. Un peu de mathématiques du niveau de la table de multiplication suffit à montrer qu'à la génération suivante les nombres sont en proportion...

On note, pour tout $k \in \mathbb{N}$, D_k l'événement « un individu de la génération k est homozygote dominant », R_k l'événement « un individu de la génération k est homozygote récessif » et M_k l'événement « un individu de la génération k est hétérozygote ». On a donc :

$$\mathbb{P}(D_0) = p, \quad \mathbb{P}(M_0) = 2q, \quad \mathbb{P}(R_0) = r.$$

1. Déterminer les proportions p_1, $2q_1$ et r_1 à la génération suivante en fonction de p, q et r.
   On commencera par déterminer les proportions des différents couples possibles à la génération 0.
2. En déduire les proportions p_2, $2q_2$ et r_2 à la deuxième génération en fonction de p_1, q_1 et r_1.
3. Que peut-on en conclure ? Donner un exemple de proportion stable des trois catégories.
4. Tracer p_1, $2q_1$ et r_1 en fonction de $x = p + q$.