Devoir à la maison n° 12
CORRIGÉ

Exercice 1.

1. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\mathbb{P}(X_{n+1}) = \mathbb{P}(X_n) \times \mathbb{P}_{X_n}(X_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{X_n}) \times \mathbb{P}_{\overline{X_n}}(X_{n+1}),$$

c'est-à-dire :

$$p_{n+1} = \frac{9}{10}p_n + \frac{4}{10}(1-p_n) = \frac{1}{2}p_n + \frac{2}{5}.$$

2. La suite (p_n) est une suite arithmético-géométrique. Pour déterminer son terme général, on résout : $\lambda = \frac{1}{2}\lambda + \frac{2}{5} \Leftrightarrow \lambda = \frac{4}{5}$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+1} - \frac{4}{5} = \frac{1}{2}\left(p_n - \frac{4}{5}\right),$$

c'est-à-dire, comme $p_0 = 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \frac{1}{2^n}\left(p_0 - \frac{4}{5}\right) + \frac{4}{5} = \frac{4}{5}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

3. On a immédiatement : $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{4}{5}$. Au bout d'un grand nombre de jours, on peut donc s'attendre à ce que 8 places sur 10 soient réservées !

Exercice 2.

1. Les couples de la génération 0 sont en proportion :

$$\mathbb{P}(D_0D_0) = p^2, \quad \mathbb{P}(D_0M_0) = \mathbb{P}(M_0D_0) = 2pq, \quad \mathbb{P}(D_0R_0) = \mathbb{P}(R_0D_0) = pr,$$
$$\mathbb{P}(M_0M_0) = 4q^2, \quad \mathbb{P}(M_0R_0) = \mathbb{P}(R_0M_0) = 2qr, \quad \mathbb{P}(R_0R_0) = r^2,$$

et leurs enfants sont en proportion :

$$\mathbb{P}_{D_0D_0}(D_1) = 1, \quad \left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{P}_{D_0M_0}(D_1) = \mathbb{P}_{M_0D_0}(D_1) & = & \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}_{D_0M_0}(M_1) = \mathbb{P}_{M_0D_0}(M_1) & = & \frac{1}{2} \end{array}\right., \quad \mathbb{P}_{D_0R_0}(M_1) = \mathbb{P}_{R_0D_0}(M_1) = 1,$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{P}_{M_0M_0}(D_1) & = & \frac{1}{4} \\ \mathbb{P}_{M_0M_0}(M_1) & = & \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}_{M_0M_0}(R_1) & = & \frac{1}{4} \end{array}\right., \quad \left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{P}_{M_0R_0}(M_1) = \mathbb{P}_{R_0M_0}(M_1) & = & \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}_{M_0R_0}(R_1) = \mathbb{P}_{R_0M_0}(R_1) & = & \frac{1}{2} \end{array}\right., \quad \mathbb{P}_{R_0R_0}(R_1) = 1,$$

donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\left\{\begin{array}{rcl} p_1 & = & \mathbb{P}(D_0D_0)\times\mathbb{P}_{D_0D_0}(D_1)+\mathbb{P}(D_0M_0)\times\mathbb{P}_{D_0M_0}(D_1) \\ & & +\mathbb{P}(M_0D_0)\times\mathbb{P}_{M_0D_0}(D_1)+\mathbb{P}(M_0M_0)\times\mathbb{P}_{M_0M_0}(D_1) \\ & = & p^2+2pq+q^2 \\ 2q_1 & = & 2pq+2pr+2q^2+2qr \\ r_1 & = & q^2+2qr+r^2 \end{array}\right. ,\quad \text{d'où} \quad \left\{\begin{array}{rcl} p_1 & = & (p+q)^2 \\ 2q_1 & = & 2(p+q)(q+r) \\ r_1 & = & (q+r)^2 \end{array}\right. .$$

2. À la deuxième génération, comme $p+2q+r=1$:

$$\begin{array}{rcl} p_2 & = & (p_1+q_1)^2 \\ & = & \big((p+q)^2+(p+q)(q+r)\big)^2 \\ & = & (p+q)^2(p+2q+r)^2 \\ & = & (p+q)^2 \\ & = & p_1, \end{array}$$

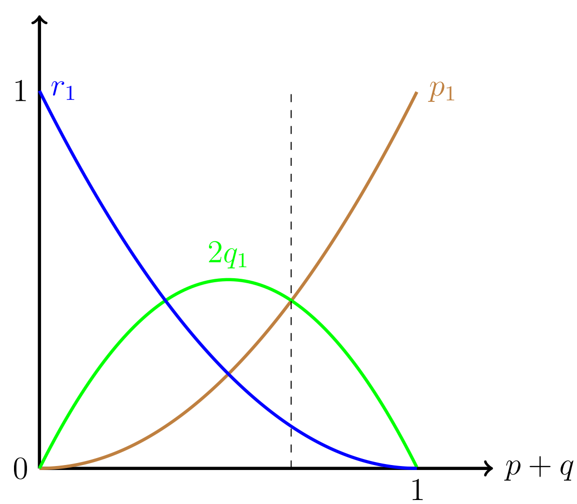
et de même : $2q_2 = 2(p+q)(q+r) = 2q_1$ et $r_2 = (q+r)^2 = r_1$.

3. La répartition est stable à partir de la génération 1 ! La conjecture de Yule est donc infirmée. Pour reprendre les mots de Hardy :

> ...à la génération suivante les nombres sont en proportion $(p+q)^2$, $2(p+q)(q+r)$, $(q+r)^2$, ou disons : p_1, $2q_1$, r_1. [...] Quelles que soient les valeurs de p, q et r, la distribution sera inchangée après la deuxième génération. [...] En un mot, l'idée selon laquelle un trait dominant tendrait à s'étendre à toute une population, ou qu'un trait récessif tendrait à disparaître, n'est absolument pas fondée.

Toute combinaison de p, q, r telle que $p+2q+r=1$ convient. Par exemple, pour $p=\dfrac{1}{2}$, $2q=\dfrac{1}{3}$, $r=\dfrac{1}{6}$, on trouve $p_1=2q_1=\dfrac{4}{9}$ et $r_1=\dfrac{1}{9}$, qui est une proportion stable.

4. On a $p_1=x^2$, $2q_1=2x(1-x)$ et $r_1=(1-x)^2$, d'où :



Ce phénomène de stabilité avait en fait déjà été remarqué, en janvier de la même année, par le médecin allemand Wilhelm Weinberg. Il est aujourd'hui connu sous le nom de principe de Hardy-Weinberg.