Feuille d'exercices 20
MATRICES ET APPLICATIONS LINÉAIRES

1 - MATRICE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

Exercice 1. Déterminer les matrices dans les bases canoniques respectives des applications linéaires suivantes :

(a) $f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+3y, 2y) \end{array} \right.$,

(b) $f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) & \mapsto & (-x+2z, 3x-4y, -5x+6z, -7y+8z) \end{array} \right.$,

(c) $f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(1) \end{array} \right.$,

(d) $f : \left\{ \begin{array}{rcl} M_2(\mathbb{R}) & \to & M_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array} \right.$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

(e) $f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P(X+1)-P(X) \end{array} \right.$.

Exercice 2. Soient f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique sont respectivement :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les matrices de $f+g$, de $f \circ g$, de $g \circ f$ et, si possible, de f^{-1} et g^{-1} dans la base canonique.

Exercice 3. Déterminer les matrices dans les bases canoniques respectives des applications linéaires suivantes. Montrer que ce sont des isomorphismes, et déterminer les matrices de leurs applications réciproques :

(a) $f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(1), P(2), P(3)) \end{array} \right.$,

(b) $f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) \end{array} \right.$,

(c) $\Phi : \left\{ \begin{array}{rcl} E & \to & E \\ f & \mapsto & f'-f \end{array} \right.$ où $E = \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$.

2 - CHANGEMENTS DE BASES

Exercice 4. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = ((1,0,0,0), (1,1,0,0), (1,1,1,0), (1,1,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^4$. Déterminer les coordonnées de $u = (2,1,-3,4)$ dans cette base.

Exercice 5. On considère $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est :

$$M = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Montrer que les vecteurs

$$e'_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3, \quad e'_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3, \quad e'_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$$

forment une base de $\mathbb{R}^3$, et calculer la matrice de f dans cette base.

Exercice 6.

(a) On note $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Justifier que la matrice P est une matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à une autre base $\mathcal{B}$.

(b) On note $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par $f(x, y, z) = (2x+2y+z, -2x-y, x+y-z)$. Déterminer la matrice de f dans la base canonique, puis dans la base $\mathcal{B}$. En déduire $f \circ f \circ f$.

Exercice 7. Soient $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(a, b, c) = \int_0^2 \frac{ax^2 + bx + c}{(x+1)(x-3)} dx,$$

et $\mathcal{B} = ((0, 1, 1), (0, 1, -3), (1, -2, -3))$.

(a) Montrer que f est linéaire et que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Déterminer $f(\mathcal{B})$ et la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base canonique.

(c) En déduire $f(a, b, c)$ pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

3 - Rang d'une matrice

Exercice 8. Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & c & 2 \\ 2 & c & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Soient $u_1 = (2, 1, -1)$, $u_2 = (2, -1, 1)$ et $u_3 = (0, 2, 2)$.

(a) Vérifier que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Calculer $f(u_3) + 5u_2$. En déduire la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}$.

(c) Déterminer le rang de f et une base de $\mathrm{Ker} f$. Déterminer f^3.

Exercice 10. Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ du projecteur sur le plan d'équation $x + y - z = 0$ parallèlement à la droite $\mathrm{Vect}\,((1, 1, 1))$.

Exercice 11. Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f n'a qu'un coefficient non nul.

Exercice 12. Montrer que la matrice $S = \begin{pmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 6 & 7 & 6 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ est la matrice d'une symétrie. En déterminer les éléments caractéristiques.