Devoir à la maison n° 13

Exercice 1. Soit $f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x-2y-z, 2x-3y-2z, x-2y) \end{array} \right.$.
On admet que f est une application linéaire, et on note $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}_0$.
2. Vérifier que $(M - I_3)(M + 3I_3) = 0_3$.
3. (a) En déduire que $\mathrm{Im}(f + 3\mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$.
   (b) En déduire que $\dim(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})) + \dim(\mathrm{Ker}(f + 3\mathrm{Id})) \geq 3$.
   (c) En déduire que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f + 3\mathrm{Id}) = \mathbb{R}^3$.
4. Donner la dimension et une base de chacun des noyaux de la question précédente.
5. En déduire une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale. Déterminer cette matrice, ainsi que les matrices de passage entre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_0$.
6. *(Facultatif)* En déduire les puissances de M.

Exercice 2. On note $F = \mathbb{R}_2[X]$. On définit les polynômes :

$$P_0 = (X-1)(X-3)(X-5), \quad P_1 = (X-3)(X-5), \quad P_3 = (X-1)(X-5), \quad P_5 = (X-1)(X-3),$$

et on note, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $f(P)$ le reste dans la division euclidienne de P par P_0.

1. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}[X] \to F$ est bien définie et linéaire.
2. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (P_1, P_3, P_5)$ est une base de F.
3. Déterminer, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $M_{\mathcal{B}'}(f(P))$.
4. On note $\mathcal{B}'_0$ la base canonique de F.
   (a) Déterminer les matrices de passage entre $\mathcal{B}'_0$ et $\mathcal{B}'$.
   (b) En déduire les coordonnées de $Q = X^2 - 3X - 1$ dans $\mathcal{B}'$.
5. On note $E = \mathbb{R}_4[X]$, $\mathcal{B}_0$ sa base canonique, et $g : E \to F$ la restriction de f à E.
   Déterminer $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}_0}(g)$, et en déduire $M_{\mathcal{B}'_0}^{\mathcal{B}_0}(g)$. Que vaut $f(X^4)$?