Feuille d'exercices 21

INTÉGRATION

1 - PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE

Exercice 1. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

(a) $f : x \mapsto \displaystyle\int_2^{2x} \ln t \, dt$,

(b) $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt$,

(c) $f : x \mapsto \displaystyle\int_1^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt$,

(d) $f : x \mapsto \displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{\sqrt{x}} \frac{t dt}{1+t^4}$.

Exercice 2. Déterminer les limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \int_{-x}^{x} \cos(t^2) dt$,

(b) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_x^{2x} \frac{dt}{(\ln t)^2}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$,

(d) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_x^{2x} \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t} dt$.

Exercice 3. Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t+i}$.

Exercice 4. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x E(t) dt$, où E désigne la partie entière, et montrer que la fonction F est continue.

Exercice 5. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\displaystyle\int_0^1 f = f(1)$. Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 6. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_0^1 f = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 7. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt = \int_0^1 t f(t)\, dt = 0$. Montrer que f s'annule au moins deux fois sur $]0,1[$.

Exercice 8. Soient $1 < a < b$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_a^b \cos(nt^2) dt$.

Exercice 9. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et positive. Déterminer la limite de la suite de terme général $I_n = \left(\displaystyle\int_a^b f^n \right)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et positive, telle qu'il existe $k \geq 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ f(x) \leq k \int_0^x f(t) dt.$$

Montrer que f est nulle.

2 - SOMMES DE RIEMANN

Exercice 11. En utilisant les sommes de Riemann, calculer $\displaystyle\int_1^3 t^2 dt$.

Exercice 12. Sans utiliser de primitive, calculer $\displaystyle\int_0^x \cos t\, dt$ et $\displaystyle\int_0^x \sin t\, dt$.

Exercice 13. Déterminer les limites des suites suivantes :

(a) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$,

(b) $u_n = \dfrac{1}{n}\left(\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{4} + \ldots + \sqrt[n]{2^n}\right)$,

(c) $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3k+n}$,

(d) $u_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$.

3 - FORMULES DE TAYLOR

Exercice 14.

(a) Écrire la formule de Taylor avec reste intégral en $x = 0$ pour $f : x \mapsto \ln(1+x)$.

(b) En déduire la limite de la suite de terme général $u_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Exercice 15. En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)\right| \leq \frac{|x|^7}{7!}.$$

Exercice 16. Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Calculer $I_{m,n} = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^m t^n\, dt$.

4 - CALCUL D'INTÉGRALES

Exercice 17. Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_2^5 \frac{dt}{t^2-t}$,

(b) $\displaystyle\int_0^1 t^2(t^3+1)^5 dt$,

(c) $\displaystyle\int_1^{e^\pi} \sin(\ln t) dt$,

(d) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin t + \tan t}$,

(e) $\displaystyle\int_1^8 \frac{dt}{2\sqrt[3]{t}-1}$,

(f) $\displaystyle\int_{\ln 3}^{\ln 7} \frac{dt}{1-4e^{-2t}}$,

(g) $\displaystyle\int_{-1}^2 t|t| dt$,

(h) $\displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{t}} dt$,

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}} dt$,

(j) $\displaystyle\int_0^1 t \arctan^2 t dt$,

(k) $\displaystyle\int_0^1 t\sqrt{1-t^2} dt$,

(l) $\displaystyle\int_2^5 \frac{t+1}{t^2-t-6} dt$.

Exercice 18.

(a) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in [a,b],\ f(a+b-x) = f(x)$. Montrer que :

$$\int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx.$$

(b) En déduire $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x \sin(x)}{1+\cos^2(x)} dx$.