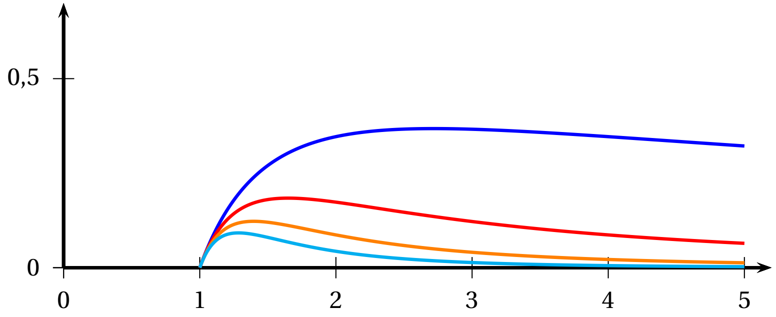
Exercice 1 — Type Bac S

On considère, pour tout entier $n > 0$, les fonctions f_n définies sur l'intervalle $[1;5]$ par :

$$f_n(x) = \frac{\ln x}{x^n}.$$

Pour tout entier $n > 0$, on note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal.

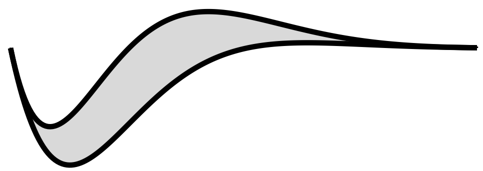
Sur le graphique ci-dessous sont représentées les courbes $\mathscr{C}_n$ pour n appartenant à $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\}$.



1. Montrer que, pour tout entier $n > 0$ et tout réel x de l'intervalle $[1\ ;\ 5]$:
$$f_n'(x) = \frac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}}.$$
2. Pour tout entier $n > 0$, on admet que la fonction f_n admet un maximum sur l'intervalle $[1\ ;\ 5]$.
On note A_n le point de la courbe $\mathscr{C}_n$ ayant pour ordonnée ce maximum.
Montrer que tous les points A_n appartiennent à une même courbe Γ d'équation
$$y = \frac{1}{\mathrm{e}}\ln(x).$$
3. (a) Montrer que, pour tout entier $n > 1$ et tout réel x de l'intervalle $[1\ ;\ 5]$:
$$0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x^n} \leqslant \frac{\ln(5)}{x^n}.$$
(b) Montrer que pour tout entier $n > 1$:
$$\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right).$$
(c) Pour tout entier $n > 0$, on s'intéresse à l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface sous la courbe f_n, c'est-à-dire l'aire du domaine du plan délimité par les droites d'équations $x = 1$, $x = 5$, $y = 0$ et la courbe $\mathscr{C}_n$.
Déterminer la valeur limite de cette aire quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 — Aires

Un publicitaire souhaite imprimer le logo ci-dessous sur un T-shirt :



Il dessine ce logo à l'aide des courbes de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) \quad \text{et} \quad g(x) = -\mathrm{e}^{-x}\cos x.$$

On admet que les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Partie A — Étude de la fonction f

1. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$-\mathrm{e}^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 3\mathrm{e}^{-x}.$$
2. En déduire la limite de f en $+\infty$.
3. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(2\cos x - 1)$ où f' est la fonction dérivée de f.
4. Dans cette question, on étudie la fonction f sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$.
(a) Déterminer le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$.
(b) En déduire les variations de f sur $[-\pi\ ;\ \pi]$.

Partie B — Aire du logo

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions f et g dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath};\vec{\jmath}\right)$

1. Utiliser votre calculatrice pour visualiser les deux courbes sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{3\pi}{2}\right]$.
2. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la courbe $\mathscr{C}_g$ sur $\mathbb{R}$.
3. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$H(x) = \left(-\frac{\cos x}{2} - \frac{\sin x}{2} - 1\right)\mathrm{e}^{-x}.$$
On note $\mathscr{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, la courbe $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équation $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{3\pi}{2}$.
(a) Montrer que H est une primitive de la fonction $x \mapsto (\sin x + 1)\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.
(b) Décrire le domaine $\mathscr{D}$ sur le graphique visualisé sur la calculatrice.
(c) Calculer, en unité d'aire (à 10^{-2} près), l'aire du domaine $\mathscr{D}$.