Devoir à la maison n° 13
CORRIGÉ

Exercice 1.
1. Notons $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$. On a :
   - $f(e_1) = (2, 2, 1)$, donc $M_{\mathcal{B}_0}(f(e_1)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,
   - $f(e_2) = (-2, -3, -2)$, donc $M_{\mathcal{B}_0}(f(e_2)) = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$,
   - $f(e_3) = (-1, -2, -0)$, donc $M_{\mathcal{B}_0}(f(e_3)) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$,

   donc $M = M_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.
2. On a directement :

$$(M - I_3)(M + 3I_3) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = 0_3.$$

3. (a) La formule ci-dessus se traduit, pour les applications, par : $(f - \mathrm{Id}) \circ (f + 3\mathrm{Id}) = 0_{\mathcal{L}(R^3)}$.
   Soit $v \in \mathrm{Im}(f + 3\mathrm{Id})$, puis $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $v = (f + 3\mathrm{Id})(u)$, alors :

$$(f - \mathrm{Id})(v) = (f - \mathrm{Id}) \circ (f + 3\mathrm{Id})(u) = 0_{\mathbb{R}^3},$$

   donc $v \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$. Donc $\mathrm{Im}(f + 3\mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$.

   (b) D'après la question précédente : $\mathrm{rg}(f + 3\mathrm{Id}) \leq \dim(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}))$. Donc, d'après le théorème du rang :

$$3 = \dim(\mathbb{R}^3) = \mathrm{rg}(f+3\mathrm{Id}) + \dim(\mathrm{Ker}(f + 3\mathrm{Id})) \leq \dim(\mathrm{Ker}(f + 3\mathrm{Id})) + \dim(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})).$$

   (c) Soit $u \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Ker}(f + 3\mathrm{Id})$. Alors $f(u) = u$ et $f(u) = -3u$, donc $u = -3u$, donc $u = 0_{\mathbb{R}^3}$. Donc $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(f + 3\mathrm{Id})$ sont en somme directe.
   Par conséquent, d'après la formule de Grassmann :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f + 3\mathrm{Id}) + \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})) = \dim(\mathrm{Ker}(f + 3\mathrm{Id})) + \dim(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})) \geq 3,$$

   donc $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) + \mathrm{Ker}(f + 3\mathrm{Id}) = \mathbb{R}^3$.
   Donc $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f + 3\mathrm{Id}) = \mathbb{R}^3$.

4. Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
u\in\operatorname{Ker}(f-\mathrm{Id}) &\Leftrightarrow f(u)=u\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x-2y-z &=& 0\\ 2x-4y-2z &=& 0\\ x-2y-z &=& 0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow x-2y-z=0\\
&\Leftrightarrow x=2y+z\\
&\Leftrightarrow u=(2y+z,y,z)=y(2,1,0)+z(1,0,1),
\end{aligned}$$

donc $\operatorname{Ker}(f-\mathrm{Id})=\operatorname{Vect}(u_1,u_2)$ où $u_1=(2,1,0)$ et $u_2=(1,0,1)$. Les vecteurs u_1 et u_2 étant non colinéaires, la famille (u_1,u_2) est une base de $\operatorname{Ker}(f-\mathrm{Id})$; donc cet espace est de dimension 2.
De même :

$$\begin{aligned}
u\in\operatorname{Ker}(f+3\mathrm{Id}) &\Leftrightarrow f(u)=-3u\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 5x-2y-z &=& 0\\ 2x-2z &=& 0\\ x-2y+3z &=& 0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 4x-2y &=& 0\\ z &=& x\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y &=& 2x\\ z &=& x\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow u=(x,2x,x)=x(1,2,1),
\end{aligned}$$

donc $\operatorname{Ker}(f+3\mathrm{Id})=\operatorname{Vect}(v)$ où $v=(1,2,1)$. Le vecteur v étant non nul, la famille (v) est une base de $\operatorname{Ker}(f+3\mathrm{Id})$; donc cet espace est de dimension 1.

5. D'après les questions précédentes, $\mathcal{B}=(u_1,u_2,v)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, avec $f(u_1)=u_1$, $f(u_2)=u_2$ et $f(v)=-3v$, donc : $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-3\end{pmatrix}=D$.

De plus, on a directement : $P_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}}=M_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&0&2\\0&1&1\end{pmatrix}$, puis :

$$\begin{aligned}
\left(P_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}}\mid I_3\right) &\underset{L_1\leftrightarrow L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&0&1&0\\2&1&1&1&0&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right)\\
&\underset{L_2\leftarrow L_2-2L_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&0&1&0\\0&1&-3&1&-2&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right)\\
&\underset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&0&1&0\\0&1&-3&1&-2&0\\0&0&4&-1&2&1\end{array}\right)\\
&\underset{L_3\leftarrow \frac{L_3}{4}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&0&1&0\\0&1&-3&1&-2&0\\0&0&1&-\frac14&\frac12&\frac14\end{array}\right)\\
&\underset{\substack{L_2\ \leftarrow\ L_2+3L_3\\ L_1\ \leftarrow\ L_1-2L_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac12&0&-\frac12\\0&1&0&\frac14&-\frac12&\frac34\\0&0&1&-\frac14&\frac12&\frac14\end{array}\right),
\end{aligned}$$

donc $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_0} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

6. On a $M = P_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}} D P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_0}$, donc :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad M &= P_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}} D^n P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_0} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5-(-3)^n & -2+2\times(-3)^n & -1+(-3)^n \\ 2-2\times(-3)^n & 4\times(-3)^n & -2+2\times(-3)^n \\ 1-(-3)^n & -2+2\times(-3)^n & 3+(-3)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 2.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Comme P_0 est de degré 3, $f(P) \in F$, donc f est bien définie. De plus : Soient $A,\ B \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, puis $A = QP_0 + R$ et $B = SP_0 + T$ les divisions euclidiennes de A et B par P_0, alors : $\lambda A + \mu B = (\lambda Q + \mu S)P_0 + (\lambda R + \mu T)$, donc $f(\lambda A + \mu B) = \lambda R + \mu T = \lambda f(A) + \mu f(B)$, donc f est linéaire.
2. Soient $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_5 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 P_1 + \lambda_3 P_3 + \lambda_5 P_5 = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Les évaluations de cette égalité en $1, 3, 5$ donnent : $8\lambda_1 = -4\lambda_2 = 8\lambda_3 = 0$, donc $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_5 = 0$, donc $\mathcal{B}'$ est libre. Comme de plus $\mathrm{Card}(\mathcal{B}') = 3 = \dim(F)$, $\mathcal{B}'$ est une base de F.
3. La division euclidienne de P par P_0 s'écrit :

$$P = P_0 Q + \alpha P_1 + \beta P_3 + \gamma P_5,$$

pour un certain $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Les évaluations de cette égalité en $1, 3, 5$ s'écrivent : $P(1) = 8\alpha$, $P(3) = -4\beta$, $P(5) = 8\gamma$, donc $M_{\mathcal{B}'}(f(P)) = \begin{pmatrix} \frac{P(1)}{8} \\ -\frac{P(3)}{4} \\ \frac{P(5)}{8} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} P(1) \\ -2P(3) \\ P(5) \end{pmatrix}$.

4. (a) Comme $P_1 = (X-3)(X-5) = X^2 - 8X + 15$, $M_{\mathcal{B}_0'}(P_1) = \begin{pmatrix} 15 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$. De même, $M_{\mathcal{B}_0'}(P_2) = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $M_{\mathcal{B}_0'}(P_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $P_{\mathcal{B}_0'}^{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}_0'}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 15 & 5 & 3 \\ -8 & -6 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On a ensuite :

$$
\begin{aligned}
\left(P_{\mathcal{B}'_0}^{\mathcal{B}'} \mid I_3\right) \quad & \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -8 & -6 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 15 & 5 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \\
& \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 8L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 15L_1}}{\sim} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & -10 & -12 & 1 & 0 & -15 \end{array}\right) \\
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2}{\sim} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 5 & 25 \end{array}\right) \\
& \underset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{L_2}{2} \\ L_3 \leftarrow \frac{L_3}{8}}}{\sim} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{25}{8} \end{array}\right) \\
& \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3}}{\sim} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{5}{8} & -\frac{17}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{9}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{25}{8} \end{array}\right) \\
& \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\sim} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{9}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{25}{8} \end{array}\right),
\end{aligned}
$$

donc $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'_0} = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -6 & -18 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix}$.

(b) On a $M_{\mathcal{B}'}(Q) = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'_0}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $Q = -\dfrac{3}{8}P_1 + \dfrac{1}{4}P_3 + \dfrac{9}{8}P_5$.

5. D'après la question 3 :

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}_0}(g) = M_{\mathcal{B}'}\left(f(1)\ f(X)\ f(X^2)\ f(X^3)\ f(X^4)\right) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -6 & -18 & -54 & -162 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 \end{pmatrix},$$

donc, d'après la question 4 :

$$
\begin{aligned}
M_{\mathcal{B}'_0}^{\mathcal{B}_0}(g) &= P_{\mathcal{B}'_0}^{\mathcal{B}'} M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}_0}(g) \\
&= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 15 & 5 & 3 \\ -8 & -6 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -6 & -18 & -54 & -162 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 120 & 1080 \\ 0 & 8 & 0 & -184 & -1536 \\ 0 & 0 & 8 & 72 & 464 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 15 & 135 \\ 0 & 1 & 0 & -23 & -192 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 58 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

En particulier, $f(X^4) = 58X^2 - 192X + 135$.