Feuille d'exercices 22
DÉTERMINANTS

1 - CALCULS DE DÉTERMINANTS

Exercice 1. Calculer les déterminants suivants :

(a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & 28 \end{vmatrix}$ (g) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & a & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} 27 & 28 & 29 \\ 28 & 30 & 32 \\ 29 & 32 & 36 \end{vmatrix}$ (h) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} 24 & -21 & 13 \\ -11 & 16 & -9 \\ 23 & -19 & 12 \end{vmatrix}$ (i) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & \lambda \\ \lambda & 0 & 1 \\ 1 & \lambda & 0 \end{vmatrix}$

Exercice 2. Calculer les déterminants suivants :

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 1 & i & -1 & -i \\ i & 1 & i & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & i & 1 \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 2 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 0! & 1! & 2! & 3! \\ 1! & 2! & 3! & 4! \\ 2! & 3! & 4! & 5! \\ 3! & 4! & 5! & 6! \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a & a \\ 1 & a & a^2 & a^2 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} a & b & c & b \\ b & a & b & c \\ c & b & a & b \\ b & c & b & a \end{vmatrix}$

Exercice 3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a, b \in \mathbb{R}$, et $d_n = \underbrace{\begin{vmatrix} a & & 0 & & b \\ & \ddots & & \iddots & \\ 0 & & & & 0 \\ & \iddots & & \ddots & \\ b & & 0 & & a \end{vmatrix}}_{2n}$.

Déterminer d_n en fonction de d_{n-1}, et en déduire d_n.

Exercice 4. Calculer le déterminant de la matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ où :

(a) $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{ij} = \min(i,j)$. (b) $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{ij} = |i-j|$.

Exercice 5. Soient $a_0, a_1 \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ et $V(a_0, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \ldots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}$.

Déterminer les racines, puis la factorisation, de $P(X) = V(a_0, \ldots, a_{n-1}, X)$, et en déduire $V(a_0, \ldots, a_n)$.

2 - Applications

Exercice 6. Soit $p \in \mathbb{N}$ et soit $A \in M_{2p+1}(\mathbb{K})$ antisymétrique. Montrer que $\det A = 0$.

Exercice 7. Les familles suivantes sont-elles des bases de E ?

(a) $E = \mathbb{C}^3$, $u_1 = (1+i, 1, i)$, $u_2 = (i, -1, 1-i)$, $u_3 = (-2+i, 0, -i)$,

(b) $E = \mathbb{R}^2$, $u_1 = (\lambda+3, 3\lambda+1)$, $u_2 = (2\lambda+3, 5\lambda+4)$,

(c) $E = \mathbb{R}_2[X]$, $P_1 = 4X^2+3X-1$, $P_2 = 2X^2-2X+3$, $P_3 = 3X^2+2X-4$,

(d) $E = \mathbb{R}_2[X]$, $P_1 = X^2$, $P_2 = X(X-1)$, $P_3 = (X-1)^2$,

(e) $E = \mathbb{R}_2[X]$, $P_1 = (X-\alpha)(X-\beta)$, $P_2 = (X-\alpha)(X-\gamma)$, $P_3 = (X-\beta)(X-\gamma)$.

Exercice 8. Soient $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $B \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad |\lambda| < \delta \Rightarrow A + \lambda B \in GL_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 9. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour que la famille

$$\left(\left(1, \cos a, \cos^2 a\right), \left(1, \cos b, \cos^2 b\right), \left(1, \cos c, \cos^2 c\right)\right)$$

soit une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 10. Résoudre les systèmes linéaires suivants :

(a) $\left\{\begin{array}{rcl} 13x+42y &=& 4 \\ 7x+20y &=& 10 \end{array}\right.$ (b) $\left\{\begin{array}{rcl} 3x-6y+z &=& 7 \\ x+2y+z &=& 5 \\ -2x+5y-2z &=& -1 \end{array}\right.$ (c) $\left\{\begin{array}{rcl} \lambda x+y+z &=& 1 \\ x+\lambda y+z &=& \lambda \\ x+y+\lambda z &=& \lambda^2 \end{array}\right.$

3 - Déterminant d'un endomorphisme

Exercice 11. Soit $A \in M_2(\mathbb{K})$, et soit $f \in \mathcal{L}(M_2(\mathbb{K}))$ définie par $f(M) = AM$.
Montrer que $\det f = (\det A)^2$.

Exercice 12. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ définie par $\varphi(P) = Q$ où :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = \int_x^{x+1} P(t)dt.$$

Montrer que φ est bien définie, et calculer $\det \varphi$.

Exercice 13. Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit p un projecteur de E de rang $r \leq n$, et soit s la symétrie associée à p. Déterminer les déterminants de p et s.