$\boxed{\boxed{\text{Correction DM}}\ \text{intégration}}$

Exercice 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall x \in [1;5]$, $f_n(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^n}$.

1°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est dérivable sur $[1,5]$ et $f'_n(x) = \dfrac{x^n \times \frac{1}{x} - nx^{n-1}\ln(x)}{(x^n)^2}$

$$f'_n(x) = \frac{x^{n-1} - x^{n-1}n\ln(x)}{x^{2n}}$$

$$\boxed{f'_n(x) = \frac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}}}$$

2°) $f'_n(x) = 0 \iff \ln(x) = \frac{1}{n} \iff \boxed{x_0 = e^{\frac{1}{n}}}$ abscisse du maximum.

$y_0 = f_n(x_0) = \dfrac{\ln(e^{\frac{1}{n}})}{(e^{1/n})^n} = \dfrac{1/n}{e}$ or $\ln(x_0) = \ln(e^{1/n}) = \frac{1}{n}$

Ainsi $\boxed{y_0 = \frac{1}{e} \times \ln(x_0)}$ Donc les points d'ordonnées maximales des courbes $\mathcal{C}_n$ sont sur la courbe d'équation $y = \frac{1}{e}\ln(x)$

3°) a) $\forall x \in [1,5]$ par croissance de la fonction $\ln$, on a

$$\ln(1) \leq \ln(x) \leq \ln(5)$$

$$0 \leq \ln(x) \leq \ln(5)$$

comme $x^n > 0$ $\boxed{0 \leq \dfrac{\ln(x)}{x^n} \leq \dfrac{\ln(5)}{x^n}}$.

3 b) $\forall n > 1$, $\boxed{\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,dx} = \displaystyle\int_1^5 x^{-n}\,dx = \left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\right]_1^5 = \frac{5^{1-n}}{1-n} - \frac{1}{1-n}$

$$= \frac{1}{n-1}\left(1 - 5^{1-n}\right) \boxed{= \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right)}$$

3c) Comme $f_n(x) \geq 0$ sur $[1;5]$ l'aire sous la courbe est la valeur de l'intégrale :

$$0 \leq f_n(x) \leq \ln 5 \times \frac{1}{x^n}$$

par croissance de l'intégrale, $0 \leq \displaystyle\int_1^5 f_n(x)dx \leq \underbrace{\ln 5 \int_1^5 \frac{1}{x^n}dx}_{\ln(5) \times \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right)}$

a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{5^{n-1}}\right)=0$

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^5 f_n(x)\,dx=0}$

Exercice 2

$f(x)=e^{-x}(-\cos x+\sin x+1)$ et $g(x)=-e^{-x}\cos x$

A 1°) $\forall x\in\mathbb{R}$,
$$\left.\begin{array}{l} -1\leq -\cos x\leq 1 \\ -1\leq \sin x\leq 1 \\ 1\leq 1\leq 1 \end{array}\right\}$$
donc $1\leq -\cos x+\sin x+1\leq 3$

donc comme $e^{-x}>0$

$\boxed{e^{-x}\leq e^{-x}(-\cos x+\sin x+1)\leq 3e^{-x}}$

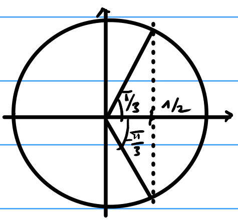
2°) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$ donc par théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0}$

3°) f dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=-e^{-x}(-\cos x+\sin x+1)+e^{-x}(\sin x+\cos x)$

$\boxed{f'(x)=(2\cos x-1)e^{-x}}$

4°) a)



$\forall x\in]-\pi,\pi[$, $e^{-x}>0$ et $2\cos x-1>0 \Leftrightarrow \cos x>\frac{1}{2}$

d'après le cercle trigonométrique, $\boxed{f'(x)>0 \Leftrightarrow x\in\left]-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right[}$

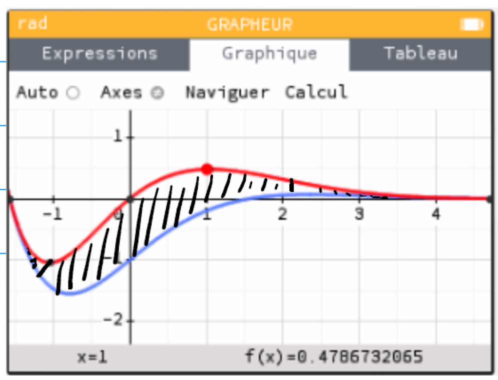
4°) b) Variations sur $[-\pi;\pi]$

$f(-\pi)=e^{\pi}\times 2$ $\quad f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=e^{\frac{\pi}{3}}\times\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=e^{-\pi/3}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\quad f(\pi)=0$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$2e^{\pi}$	$\searrow$	$\frac{1-\sqrt{3}}{2}e^{\pi/3}<0$	$\nearrow$	$e^{-\pi/3}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)>0$	$\searrow$	0

B Aire du logo.



Visualisation sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$

2°) On considère la fonction $h : x \longmapsto f(x) - g(x)$

$h(x) = e^{-x}(1 + \sin x)$ or $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 + \sin x \geq 0$
$e^{-x} > 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) \geq 0$

3°) a) $H(x) = \left(-\frac{\cos x}{2} - \frac{\sin x}{2} - 1\right)e^{-x}$

donc $H'(x) = -e^{-x}\left(-\frac{\cos x}{2} - \frac{\sin x}{2} - 1\right) + e^{-x}\left(\frac{\sin x}{2} - \frac{\cos x}{2}\right)$

$H'(x) = e^{-x}(1 + \sin x) = h(x)$

Donc H est une primitive de h.

3°) b) voir image page précédente.

3°) c) $A_{\mathcal{D}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} h(x)\,dx = \left[H(x)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = H\left(\frac{3\pi}{2}\right) - H\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$A_{\mathcal{D}} = \left(-0 - \frac{1}{2} - 1\right)e^{-\frac{3\pi}{2}} - \left(-\frac{3}{2}\right)e^{\frac{\pi}{2}}$

$A_{\mathcal{D}} = \frac{3}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{3\pi}{2}}\right) \simeq 7{,}20$ u.a.