Exercice 1

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on désigne par f_n la fonction définie sur $[0\ ;\ 1]$ par :

$$f_n(x) = x^n e^x$$

On note C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère $\left(O;\vec{\imath};\vec{\jmath}\right)$ du plan.

On désigne par (I_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^x \, dx.$$

1. (a) On désigne par F_1 la fonction définie sur $[0;1]$ par :

   $$F_1(x) = (x-1)e^x.$$

   Vérifier que F_1 est une primitive de la fonction f_1.

   (b) Calculer I_1.
2. à l'aide d'une intégration par parties, établir la relation pour tout n supérieur ou égal à 1 ,

   $$I_{n+1} = e - (n+1)I_n.$$
3. Calculer I_2.
4. Montrer que pour tout n supérieur ou égal à 1,

   $$0 \leqslant I_n \leqslant e\int_0^1 x^n \, dx.$$
5. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 2

Soit n un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f_n(x) = x^2 e^{-2nx}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal.

On définit, pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\, dx$.

Partie A : étude de la fonction f_1

1. La fonction f_1 est définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = x^2 e^{-2x}$.

   On admet que f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f_1' sa dérivée.

   (a) Justifier que pour tout réel x, $f_1'(x) = 2xe^{-2x}(1-x)$.

   (b) étudier les variations de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

   (c) Déterminer la limite de f_1 en $-\infty$.

   (d) Vérifier que pour tout réel x, $f_1(x) = \left(\dfrac{x}{e^x}\right)^2$. En déduire la limite de f_1 en $+\infty$.
2. En utilisant un système de calcul formel, on trouve qu'une primitive F_1 de la fonction f_1 est donnée par $F_1(x) = -e^{-2x}\left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}\right)$.

   En déduire la valeur exacte de I_1.

Partie B : étude de la suite (I_n)

1. Soit n un entier naturel non nul.

   (a) Interpréter graphiquement la quantité I_n.

   (b) émettre alors une conjecture sur le sens de variation et sur la limite éventuelle de la suite (I_n). Expliciter la démarche qui a mené à cette conjecture.
2. (a) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0\ ;\ 1]$,

   $$f_{n+1}(x) = e^{-2x} f_n(x).$$

   (b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0\ ;\ 1]$,

   $$f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x).$$

   (c) Déterminer alors le sens de variation de la suite (I_n).
3. Soit n un entier naturel non nul.

   (a) Justifier que pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0\ ;\ 1]$,

   $$0 \leqslant f_n(x) \leqslant e^{-2nx}.$$

   (b) En déduire un encadrement de la suite (I_n), puis sa limite.