

Le sujet est constitué de 3 parties indépendantes.

Partie1: Etude d'un objectif photographique.

Un téléobjectif est un objectif de longue focale, c'est-à-dire un objectif dont la focale est supérieure à la diagonale de la pellicule pour un appareil photographique argentique ou de la matrice de cellules photosensibles dans le cas d'un appareil photographique numérique.
Ces objectifs permettent un cadrage serré des sujets photographiés grâce à un angle de champ étroit.

Dans les trois parties suivantes, largement indépendantes, le sujet photographié est constitué par la tour Eiffel culminant à une hauteur $h = 324$ m du sol et située à une distance $d = 2,0$ km du photographe.

Partie A1 : Objectif standard

On s'intéresse dans un premier temps à un objectif standard d'appareil photographique argentique constitué d'une lentille convergente unique de centre O et de focale $f' = 50$ mm.

- Q1.** Quelle doit être la distance D entre la lentille et la pellicule pour que la photographie soit nette ? Justifier votre réponse.
- Q2.** Construire sur un schéma l'image de l'objet sur la pellicule (sans respecter l'échelle).
- Q3.** On appelle h_1 la hauteur de l'image de la tour Eiffel sur la pellicule. Déterminer son expression en fonction de f' , d et h puis calculer sa valeur numérique.

Partie A2 : Réalisation d'un téléobjectif avec une lentille unique

- Q4.** Expliquer pourquoi, si l'on souhaite photographier les détails d'un sujet lointain, il faut choisir un objectif de focale plus élevée que celle d'un objectif standard.
- Q5.** Dans le cas d'un téléobjectif de focale $f'_0 = 200$ mm, calculer la hauteur h_2 de l'image de la tour Eiffel sur la pellicule ainsi que l'encombrement de l'appareil (distance entre la lentille et la pellicule)
- Q6.** La matrice de cellules photosensibles de la plupart des reflex numériques est plus petite que la surface impressionnable de la pellicule d'un reflex 24x36. Justifier alors pourquoi un téléobjectif de focale donnée permet un cadrage plus serré du sujet avec un appareil numérique qu'avec un appareil argentique.

On considère dans un premier temps une lentille de verre d'indice n placée dans l'air (figure 1). On se place dans l'approximation d'un indice n ne dépendant pas de la longueur d'onde.

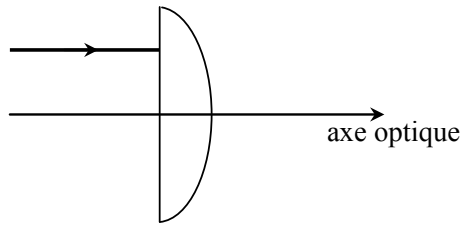


Figure 1

- Q7.** Reproduire la figure 1 et tracer la marche du rayon incident représenté dans et après la lentille. Justifier sommairement le tracé.
- Q8.** Quelle est la nature de cette lentille ? Justifier.
- Q9.** Définir le foyer image d'un système optique. Indiquer sur la figure le foyer image F' de la lentille.

L'indice de réfraction n du verre constituant la lentille dépend en réalité de la longueur d'onde λ de la radiation lumineuse qui la traverse. Ils sont reliés par la loi de Cauchy : $n(\lambda) = a + \frac{b}{\lambda^2}$ où a et b sont des constantes positives qui ne dépendent que du milieu traversé.

- Q10.** Comparer r_R et r_B , angles réfractés en sortie de lentille pour une radiation rouge et pour une radiation bleue en considérant des rayons incidents parallèles à l'axe optique. Tracer alors les chemins suivis par ces deux radiations dans et après la lentille.
- Q11.** Expliquer le problème qui pourrait se poser si l'on réalisait un téléobjectif avec une lentille unique.

On peut s'affranchir de ce problème en réalisant un doublet, équivalent à une lentille convergente unique, constitué d'une lentille convergente accolée à une lentille divergente, les deux lentilles étant taillées dans des verres d'indices de réfraction différents. Le téléobjectif ainsi constitué présente toutefois l'inconvénient d'un encombrement important.

Partie A3 : Réalisation d'un téléobjectif par association de deux lentilles distantes de e

Afin de raccourcir les téléobjectifs, en particulier les plus puissants, on peut réaliser un autre montage en associant deux lentilles distantes d'une distance e : une lentille convergente L_1 de centre O_1 et de focale f_1 et une lentille divergente L_2 de centre O_2 et de focale f_2 .

On prendra pour les applications numériques : $f_1 = 50$ mm, $f_2 = -25$ mm et $e = O_1O_2 = 31$ mm.

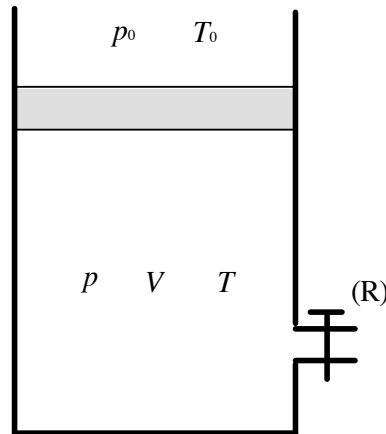
On note P l'intersection du plan de la pellicule avec l'axe optique et F' l'image par le téléobjectif d'un point à l'infini sur l'axe optique.

- Q12.** Déterminer littéralement la position de F' en fonction de f_1 , f_2 et e . En déduire l'expression de l'encombrement O_1P de l'appareil en fonction de ces mêmes grandeurs. Après l'avoir calculé approximativement, déterminer laquelle de ces trois valeurs : $O_1P = 14$ cm, $O_1P = 11$ cm et $O_1P = 8,0$ cm correspond à l'encombrement du téléobjectif.
- Q13.** Déterminer l'expression de h_3 , hauteur de l'image de la tour Eiffel sur la pellicule en fonction de f_1 , f_2 , e , d et h . Après l'avoir calculée approximativement, déterminer laquelle de ces trois valeurs : $h_3 = 14$ mm, $h_3 = 34$ mm et $h_3 = 54$ mm correspond à la hauteur de l'image sur la pellicule.
- Q14.** Commenter les résultats précédents.

Partie 2: Compression d'un gaz parfait.

Les questions 4., 5., 6. et 7. sont indépendantes.

On considère un cylindre vertical de section S fermé par un piston horizontal de masse négligeable, se déplaçant sans frottements (voir figure 1). Le cylindre est muni d'un robinet (R) dans sa partie inférieure. Sauf indication contraire, le robinet est fermé.



- figure 1 -

Le cylindre contient n mol d'air, à la température $T_1 = T_0$ (T_0 est la température extérieure supposée constante) et à la pression $p_1 = p_0$ (p_0 est la pression atmosphérique supposée constante).

Le piston, les parois du cylindre et le robinet sont supposés être calorifugés.

L'air est considéré comme un gaz parfait dont on note γ le rapport des capacités thermiques molaires isobare et isochore : $\gamma = C_p / C_v$.

On note p , V et T les pression, volume et température du gaz dans un état d'équilibre quelconque.

On note R la constante des gaz parfaits.

On donne pour les applications numériques :

$$S = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2 ; n = 0,20 \text{ mol} ; R = 8,32 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} ; T_0 = 300 \text{ K} ; p_0 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa} ; \gamma = 1,40.$$

1. Rappeler les expressions différentielles dU et dH des énergie interne et enthalpie du gaz parfait contenu dans le cylindre en fonction de n , R , γ et T .

2. Établir les expressions différentielles dS de l'entropie du gaz parfait contenu dans le cylindre en fonction de n , R , γ , T et V , puis en fonction de n , R , γ , T et p .

3. Exprimer puis calculer le volume initial V_1 de l'air et la hauteur initiale h_1 du piston.

4. L'opérateur appuie très lentement sur le piston de manière à ce que la pression du gaz devienne égale à $p_2 = 1,5 \cdot p_1$.

devienne égale à $p_2 = 1,5 \cdot p_1$.

4.1. Préciser le type de transformation subie par le gaz. À quelle loi obéit le gaz au cours de cette transformation ? Établir, à l'aide de la question 1, les trois relations entre p , T , V qui caractérisent cette loi.

4.2. Exprimer puis calculer le volume V_2 et la température T_2 du gaz.

4.3. Exprimer le travail W_r reçu par le gaz au cours de la transformation en fonction de n , R , γ , T_1 et T_2 . Calculer numériquement W_r .

4.4. Calculer la variation d'entropie du gaz au cours de cette transformation. Calculer l'entropie créée au cours de la transformation. Conclure.

5. Le système étant de nouveau dans son état initial (p_1 , V_1 , T_1), l'opérateur applique brutalement une force de norme F constante sur le piston jusqu'à atteindre un état d'équilibre pour lequel la pression du gaz est égale à $p_3 = 1,5.p_1$.

5.1. En écrivant l'équilibre mécanique du piston, exprimer puis calculer F .

5.2. Exprimer le travail W_i reçu par le gaz au cours de la transformation en fonction de p_3 , V_1 et V_3 .

5.3. En utilisant le premier principe de la thermodynamique, exprimer le volume V_3 du gaz en fonction de V_1 , γ et du rapport $\frac{p_1}{p_3}$. Calculer V_3 . En déduire la température T_3 du gaz dans le cylindre.

5.4. Calculer le travail W_i reçu par le gaz au cours de la transformation. Comparer W_i et W_r et conclure.

5.5. Calculer la variation d'entropie du gaz au cours de cette transformation. Calculer l'entropie créée au cours de la transformation. Conclure.

6. L'opérateur bloque le piston dans une position telle que :

$$V = V_4 = 2,80 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 ; T = T_4 = T_0 = 300 \text{ K et } p = p_4.$$

6.1. Calculer p_4 .

Les parois du cylindre et le robinet étant toujours imperméables à la chaleur, l'opérateur ouvre le robinet pendant un court instant, jusqu'à ce que la pression dans le cylindre soit égale à la pression atmosphérique p_0 , puis il referme le robinet. On note n' la quantité de gaz sorti du cylindre au cours de cette transformation, dont on suppose qu'il est aussitôt en équilibre thermique et mécanique avec l'extérieur : à pression p_0 et température T_0 . La température du gaz resté dans le cylindre est alors $T_5 = 276 \text{ K}$.

6.2. Justifier rapidement et sans calculs la diminution de température dans le cylindre.

6.3. Calculer la quantité de gaz n' qui est sortie du cylindre.

6.4. Exprimer le travail W reçu par les n mol de gaz initialement présentes dans le cylindre en fonction de n' , R et T_0 . Calculer W .

6.5. Exprimer puis calculer la variation d'entropie des n mol de gaz initialement présentes dans le cylindre, au cours de cette transformation. Calculer l'entropie créée au cours de la transformation. Conclusion.

7. À partir de l'état précédent (p_0, V_4, T_5) où le cylindre contient $n'' = 0,122$ mol, le dispositif n'étant pas parfaitement calorifugé, la température dans le cylindre va, au bout d'un certain temps, être égale à la température extérieure T_0 .

7.1. Quelle sera alors la pression p_6 à l'intérieur du cylindre ?

7.2. Exprimer puis calculer le transfert thermique Q reçu par le gaz contenu dans le cylindre.

7.3. Exprimer puis calculer la variation d'entropie du gaz contenu dans le cylindre au cours de cette transformation. Calculer l'entropie créée au cours de la transformation. Conclusion.

Partie 3-A: Etude d'un accéléromètre.

La miniaturisation, la fiabilité et le faible coût des capteurs à MEMS (Micro-Electro-Mechanical-Systems) permettent de les intégrer dans de nombreux dispositifs électroniques embarqués. La plupart des accéléromètres à MEMS permettent de mesurer les accélérations suivant deux axes.

On limite l'étude à la modélisation du fonctionnement d'un accéléromètre à un seul axe. Un accéléromètre est modélisé par un système masse-ressorts amorti, dont le schéma de principe est représenté sur la figure 2. On suppose que les déplacements ne s'effectuent que selon l'axe Ox horizontal.

L'accéléromètre se compose d'une masse mobile m , assimilée à un point matériel C , astreinte à se déplacer sans frottements secs (ou solides) selon l'axe horizontal Ox . Le boîtier rigide de l'accéléromètre, de longueur L selon l'axe Ox , de centre B se déplace dans le référentiel d'étude terrestre \mathcal{R} supposé galiléen et on note \vec{a} son accélération dans ce référentiel. Son accélération s'écrit $\vec{a} = a\vec{e}_x$.

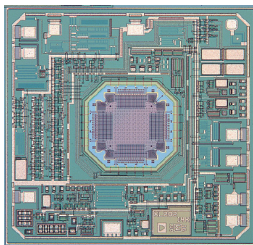


Figure 1 - Accéléromètre MEMS

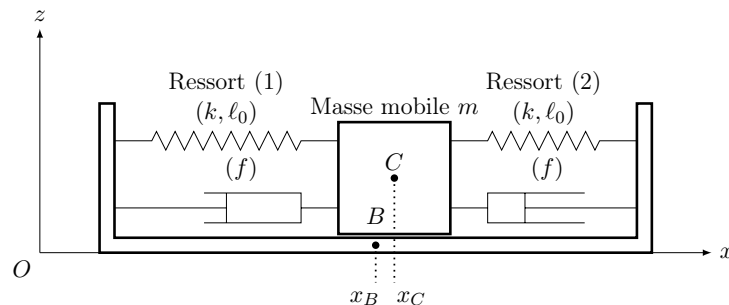


Figure 2 - Modélisation de l'accéléromètre

On note, à un instant t quelconque, x_C la position de la masse mobile $m = 10,0 \mu\text{g}$ en mouvement, x_B la position du centre du boîtier et $X = x_C - x_B$ la position de la masse mobile par rapport au centre du boîtier. Lorsque le boîtier de l'accéléromètre est au repos ou animé d'un mouvement rectiligne uniforme (c.à.d. $\vec{a}_{\text{boîtier}} = \vec{0}$), la position de la masse mobile par rapport au centre du boîtier vérifie $X = 0$ et les ressorts (1) et (2) ont alors pour longueur leur longueur à vide ℓ_0 . Lorsque le boîtier subit une accélération, la masse mobile quitte la position définie précédemment.

On néglige les frottements solides entre le support et la masse de sorte que verticalement, le poids du mobile est compensé par la réaction normale du support. Pour décrire le mouvement horizontal de la masse mobile m , on considère donc qu'elle est soumise :

- aux forces de rappel \vec{T}_1 et \vec{T}_2 exercées par deux ressorts identiques de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 .
- à des forces de frottements visqueux dont la résultante est proportionnelle à la vitesse relative de la masse mobile par rapport au boîtier $\vec{F}_f = -2f(\dot{x}_C - \dot{x}_B)\vec{e}_x$ où f est le coefficient de frottement visqueux.
- au poids \vec{P} ;

- à la réaction du boîtier R .

1. Montrer que la résultante des forces de rappel exercées par les deux ressorts s'écrit $\vec{T} = -2kX\vec{e}_x$.

2. Montrer que, lorsque le boîtier subit une accélération, l'équation différentielle vérifiée par l'élongation X s'écrit :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = -a$$

avec ω_0 et Q deux constantes que l'on exprimera en fonction de k , m et f .

3. Quelles sont les unités de ω_0 et Q ?

4. Pour quelle gamme de fréquence (ou de pulsation) ce système se comporte-t-il comme un accéléromètre, comme un capteur de position ?

Une solution générale de cette équation différentielle lorsque le système est soumis à un échelon d'accélération a pour expression :

$$X(t) = -\frac{a}{\omega_0^2} + A e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega_p t + \varphi)$$

Donner l'expression de τ et ω_p en fonction de ω_0 et Q puis en fonction de m , k et f .

On considère une voiture initialement à la vitesse $\vec{v} = v_0 \vec{e}_x$ avec $v_0 = 50 \text{ km.h}^{-1}$. A l'instant $t = 0$, elle entame une phase de décélération d'intensité constante ($\vec{a} = -a_0 \vec{e}_x$) avec $a_0 > 0$. La distance nécessaire pour s'arrêter est $D = 96 \text{ m}$.

5. Exprimer et calculer l'intensité de la décélération a_0 .

Durant cette phase, le déplacement de la masse de l'accéléromètre (identique à celui étudié aux questions précédentes) est déterminé par un dispositif qui sera étudié à la partie suivante.

Le chronogramme représentant l'évolution de la position relative de la masse au cours du temps est représenté sur la figure 3.

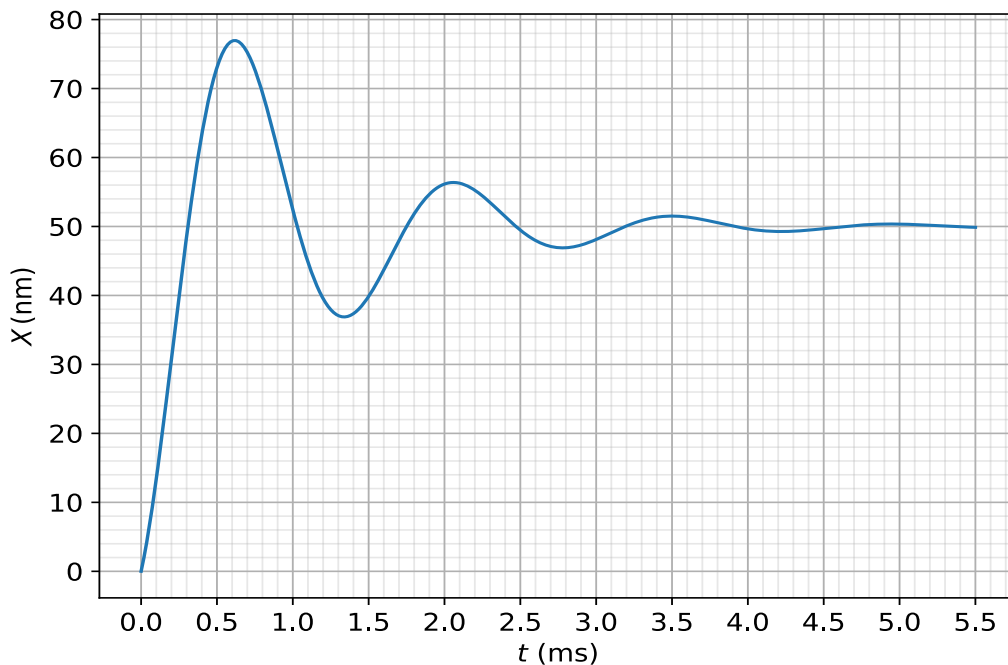
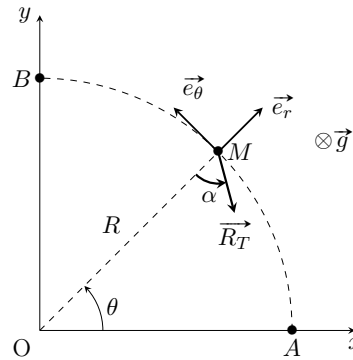


Figure 3 - Chronogramme de la position relative de la masse

6. Estimer à partir du chronogramme les valeurs de la constante de raideur d'un ressort k , le coefficient de frottement fluide f et justifier le signe et la valeur de X en régime permanent (pendant la phase de décélération).

On étudie maintenant la trajectoire de la voiture assimilable à un point matériel noté M lors d'un mouvement uniforme s'effectuant sur un arc de cercle de rayon $R = 10$ m allant d'un point A à un point B . Lors de sa trajectoire, la voiture est soumise à une force motrice $\vec{F} = F \vec{e}_\theta$, à son poids \vec{P} , à la réaction de la route $\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{R}_T$ composée d'une composante normale et d'une composante tangentielle représentant les frottements solides qui obéit à une loi de Coulomb : $||\vec{R}_T|| \leq \beta ||\vec{R}_N||$ où β est le coefficient de frottement solide. La situation est représentée sur la figure ci-contre.

On négligera les frottements de l'air.



7. Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la voiture dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Un accéléromètre situé dans la voiture (semblable à celui étudié précédemment) est disposé de façon à mesurer l'accélération latérale de la voiture. C'est-à-dire que l'axe Ox de la figure 2 est en permanence orienté dans la direction du vecteur unitaire \vec{e}_r .

8. Lors de la trajectoire, la position de l'accéléromètre est $X_r = 72$ nm. En déduire la norme de la vitesse de la voiture.

9. Exprimer la vitesse maximale que peut avoir la voiture sans glisser vers l'extérieur du virage en fonction de F , β , m , g et R .

Faites l'application numérique pour $\beta = 0,8$; $F = 4,0$ kN et $m = 10 \cdot 10^2$ kg.

Partie 3-B Conditionnement de l'accéléromètre.

On s'intéresse dans cette partie au système de détection du déplacement X de la masse mobile de l'accéléromètre pour cela on utilise un condensateur à écartement variable dont les électrodes successives sont liées alternativement à la masse mobile et au boîtier.

En effet, chaque électrode se comporte comme l'armature d'un condensateur de section S . On rappelle à ce titre l'expression d'un condensateur composé de deux armatures de surface S et distantes de d :

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

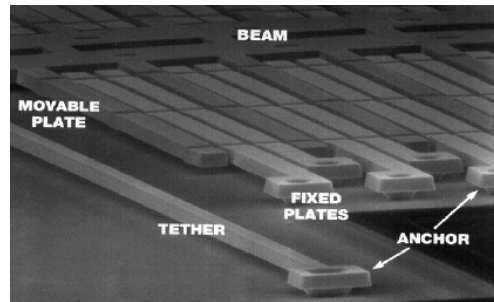


Figure 4 - Détail de la microstructure de la partie détection de l'accéléromètre.

Dans les accéléromètres à MEMS, la méthode de mesure consiste à déterminer la différence de potentiel u_m entre l'électrode liée à la masse mobile et la masse électrique du circuit. Le schéma de principe de la méthode de mesure est représenté figure. Une seconde électrode fixe, liée au boîtier, est placée symétriquement par rapport à $X = 0$. La première électrode fixe est portée au potentiel V_a , la seconde au potentiel $-V_a$, la différence de potentiel entre la première électrode et la masse est notée $u_a(t) = U_a \cos(\omega t)$ et la différence de potentiel entre la seconde électrode et la masse est notée $-u_a(t)$. L'électrode mobile sert alors de sonde de mesure. La différence de potentiel $u_m(t)$ entre l'électrode mobile et la masse est fonction du déplacement X de l'électrode mobile entre les deux électrodes fixes liées au boîtier.

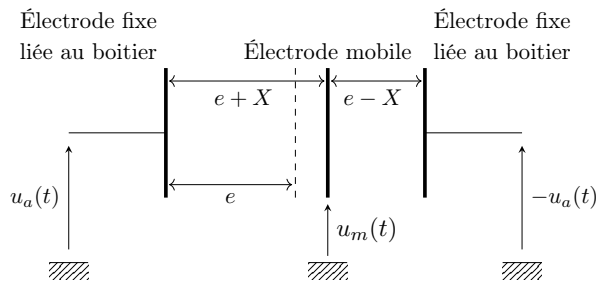


Figure 5

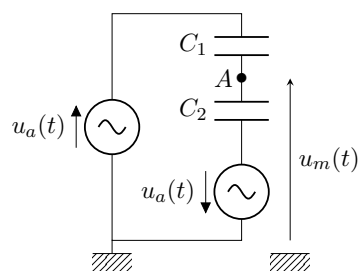


Figure 6

Un modèle électrique équivalent est représenté sur la figure 6 où le condensateur de capacité C_1 modélise l'interaction électrique entre les deux armatures de droite et le condensateur C_2 modélise l'interaction électrique entre les deux armatures de gauche.

1. Donner l'expression de la tension u_m en fonction de C_1 , C_2 et u_a .

En adaptant l'expression de la capacité d'un condensateur à chaque cas, montrer que : $u_m = -u_a \frac{X}{e}$.

Donner l'ordre de grandeur de l'amplitude U_m de la tension u_m pour $e \sim 1 \mu\text{m}$, $U_a \sim 1 \text{V}$ et $X \sim 10 \text{nm}$. Commenter.

Pour pallier le problème précédent, on utilise la structure représentée sur la figure 7. L'A.L.I est idéal et on suppose qu'il fonctionne en régime linéaire.

2. Justifier que l'A.L.I puisse fonctionner en régime linéaire et déterminer la relation entre u_2 et u_1 en fonction de R_1 et R_2 . Déterminer l'impédance d'entrée du circuit définie comme le rapport entre u_1 et i_1 . Quel problème cela pose-t-il si on connecte directement le point A au point B ?

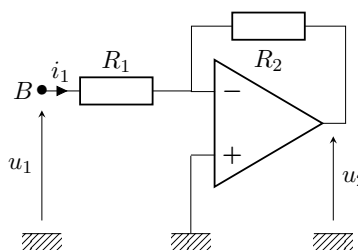


Figure 7

On décide alors d'intercaler le circuit composé d'un A.L.I supposé idéal et fonctionnant en régime linéaire représenté sur la figure 8 entre les deux circuits précédents.

3. Montrer que ce circuit permet de lever le problème précédent. Donner l'expression de l'amplitude U_2 de la tension $u_2(t)$ en fonction de U_a , X , e , R_1 et R_2 une fois que la chaîne complète est réalisée.

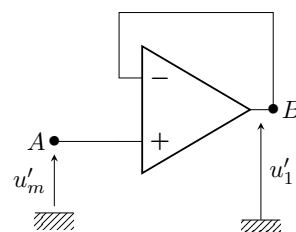


Figure 8

La présence des amplificateurs et d'autres éléments est généralement source de bruit électronique (signal "parasite") qui vient se superposer au signal $u_2(t)$ qualifié d'utile. Pour cette raison, on souhaite filtrer le signal $u_2(t)$.

A cet effet, on utilise le filtre passe-bande représenté sur la figure 9.

4. Montrer par une étude rapide que ce filtre est bien un filtre passe-bande.

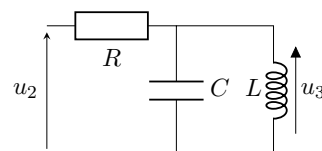


Figure 9

5. Déterminer l'expression de la fonction de transfert du filtre $\underline{H} = \frac{u_3}{u_2}$ et la mettre sous la forme suivante :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

avec H_0 , ω_0 et Q des constantes à exprimer en fonction de R , L et C .

On fournit en annexe le diagramme de Bode en gain du filtre étudié.

6. Indiquer sur le diagramme de Bode fournit en annexe **à rendre avec la copie** la valeur du gain maximale, la fréquence f_0 , la bande passante à -3dB notée Δf et la détermination des pentes à basse et haute fréquence.

7. On choisit un condensateur de capacité $C = 6,8 \text{ nF}$. En déduire les valeurs de L et R .

Annexe

