Le problème de Bâle

Le problème de Bâle consiste en la détermination de la limite de la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Il a été énoncé en 1644 et résolu par Leonhard Euler en 1741.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [0, \pi]$ on pose :

$$D_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos kt.$$

   (a) Démontrer que pour tout $t \in [0, \pi]$:

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$$

   (b) En déduire une formule pour $D_n(t)$ sans signe somme.

2. On définit la fonction f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sin x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose :

$$I_n = \int_0^{\pi} \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) D_n(t)\, dt$$

   (a) Déterminer une fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) \sin\left((2n+1)x\right) dx$$

   (b) À l'aide d'une intégration par parties démontrer que I_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ soit :

$$u_k = \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(kt)\, dt$$

   (a) Calculer u_0.

   (b) Calculer u_k pour $k > 0$.

5. (a) Donner une relation entre I_n et B_n.

   (b) Démontrer que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite.