Le problème de Bâle
CORRIGÉ

1. (a) Pour tout $t \in [0, \pi]$:

$$D_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos kt = 1 + \sum_{k=1}^{n}\Big(e^{ikt} + e^{-ikt}\Big)$$
$$= \sum_{k=-n}^{-1} e^{ikt} + e^{0it} + \sum_{k=1}^{n} e^{ikt} = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$$

(b) L'écriture ci-dessus est la somme des termes d'une suite géométrique de raison e^{it}.
Si $t = 0$ alors cette raison est égale à 1, si $t \in]0, \pi]$ elle est différente de 1.
Dans le premier cas on obtient :

$$D_n(0) = \sum_{k=-n}^{n} 1 = 2n + 1$$

On peut aussi écrire : $D_n(0) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos 0 = 2n + 1$

Dans le second cas, c'est-à-dire si $t \in]0, \pi]$ on obtient :

$$D_n(t) = \frac{e^{-int} - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}}$$

On utilise la méthode de l'angle moyen :

$$D_n(t) = \frac{e^{i\frac{t}{2}}\Big(e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)t} - e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)t}\Big)}{e^{i\frac{t}{2}}\Big(e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}}\Big)} = \frac{\sin\Big(\big(n+\frac{1}{2}\big)t\Big)}{\sin\frac{t}{2}}$$

2. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ par quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas. En effet la fonction sinus est non-nulle sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.
L'équivalence $\sin x \underset{(0)}{\sim} x$ montre que : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$.
Ainsi f est continue en 0.
Démontrons qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0, grâce au théorème de limite de la dérivée.
On a justifié que f est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Sa dérivée est :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad f'(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}$$

On calcule la limite en 0 de cette dérivée grâce à un développement limité :

$$f'(x) \underset{(0)}{=} \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x\Big(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\Big)}{\big(x + o(x^2)\big)^2} \underset{(0)}{=} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^2 + o(x^3)} \underset{(0)}{=} \frac{x}{3} + o(x)$$

On en déduit : $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$

Finalement :

- La fonction f est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- La fonction f est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = 0$

D'après le théorème de limite de la dérivée f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
Ceci implique aussi que f' est continue en 0, et donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0.
On a justifié que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

3. (a) Posons $x = \frac{t}{2}$. Alors $t = 2x$, la fonction $x \mapsto 2x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\frac{dt}{dx} = 2$ donc $dt = 2dx$, puis par changement de variable :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2x - \frac{2x^2}{\pi}\right) D_n(2x)\, 2dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\left(x - \frac{x^2}{\pi}\right) D_n(2x)\, dx$$

D'après la question (1b) :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad D_n(2x) = \begin{cases} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x} & \text{si } x > 0 \\ 2n+1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Dans le cas où x est non-nul on calcule :

$$\begin{aligned} 4\left(x - \tfrac{x^2}{\pi}\right) D_n(2x) &= 4\left(x - \tfrac{x^2}{\pi}\right) \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x} \\ &= 4 \frac{x}{\sin x}\left(1 - \tfrac{x}{\pi}\right) \sin((2n+1)x) = 4f(x)\left(1 - \tfrac{x}{\pi}\right) \sin((2n+1)x) \end{aligned}$$

Si $x = 0$ alors :

$$4\left(x - \tfrac{x^2}{\pi}\right) D_n(2x) = 0 = 4f(x)\left(1 - \tfrac{x}{\pi}\right) \sin((2n+1)x)$$

On pose alors :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad g(x) = 4f(x)\left(1 - \tfrac{x}{\pi}\right)$$

Par prduit la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) \sin((2n+1)x)\, dx$$

(b) On pose $h(x) = -\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$, de dérivée $h'(x) = \sin((2n+1)x)$. Comme g et h sont de classe $\mathcal{C}^1$ alors par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_n &= \left[-g(x) \frac{\cos((2n+1)x)}{2n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(x) \frac{\cos((2n+1)x)}{2n+1}\, dx \\ &= \frac{g(0)}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(x) \cos((2n+1)x)\, dx \end{aligned}$$

En effet pour $x = \frac{\pi}{2}$ on obtient $\cos((2n+1)x) = \cos(n\pi + \frac{\pi}{2}) = 0$.

Il est immédiat que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{g(0)}{2n+1}=0$.
De plus, comme la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ alors sa dérivée g' est continue sur le segment $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, donc par théorème elle est bornée. Notons M sa borne supérieure.
Comme le cosinus est majoré par 1 alors :

$$\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\qquad |g'(x)\cos((2n+1)x)|\leqslant M$$

Par inégalité triangulaire puis croissance de l'intégrale :

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}g'(x)\cos((2n+1)x)\,dx\right|\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}|g'(x)\cos((2n+1)x)|\,dx\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}M\,dx=\frac{M\pi}{2}$$

On en déduit :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\qquad\frac{1}{2n+1}\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}g'(x)\cos((2n+1)x)\,dx\right|\leqslant\frac{M\pi}{2(2n+1)}$$

D'après le théorème d'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}g'(x)\cos((2n+1)x)\,dx=0$$

Enfin par somme :

$$\lim_{n\to+\infty}I_n=0$$

4. (a) On obtient :

$$u_0=\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)dt=\left[\frac{t^3}{6\pi}-\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi}=-\frac{\pi^2}{3}$$

(b) On pose $u(t)=\frac{t^2}{2\pi}-t$ et $v(t)=\frac{\sin(kt)}{k}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0,\pi]$, de dérivées $u'(t)=\frac{t}{\pi}-1$ et $v'(t)=\cos(kt)$.
Par intégration par parties :

$$\begin{aligned}u_k=\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(kt)\,dt&=\left[\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\frac{\sin(kt)}{k}\,dt\\&=-\frac{1}{k}\int_0^{\pi}\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\sin(kt)\,dt\end{aligned}$$

On pose $w(t)=\frac{t}{\pi}-1$ et $x(t)=-\frac{\cos(kt)}{k}$. Les fonctions w et x sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, de dérivées $w'(t)=\frac{1}{\pi}$ et $x'(t)=\sin(kt)$.
Par intégration par parties :

$$u_k=-\frac{1}{k}\left[\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\frac{\cos(kt)}{k}\right]_0^{\pi}-\frac{1}{k}\int_0^{\pi}\frac{1}{\pi}\frac{\cos(kt)}{k}\,dt=\frac{1}{k^2}-\frac{1}{\pi k^2}\left[\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^{\pi}=\frac{1}{k^2}$$

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition de I_n :

$$I_n = \int_0^{\pi} \left(t - \frac{t^2}{2\pi} \right) D_n(t)\, dt$$

Par définition de D_n :

$$I_n = \int_0^{\pi} \left(t - \frac{t^2}{2\pi} \right) \left(1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) \right) dt$$

Par linéarité de l'intégrale, puis définition des u_k :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi} \left(t - \frac{t^2}{2\pi} \right) dt + 2\sum_{k=1}^{n} \left(\int_0^{\pi} \left(t - \frac{t^2}{2\pi} \right) \cos(kt)\, dt \right) \\ &= -\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) dt - 2\sum_{k=1}^{n} \left(\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(kt)\, dt \right) = -u_0 - 2\sum_{k=1}^{n} u_k \end{aligned}$$

D'après la question précédente :

$$I_n = \frac{\pi^2}{3} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

On en déduit donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad I_n = \frac{\pi^2}{3} - 2B_n$$

(b) La relation précédente s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad B_n = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2} I_n$$

La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 d'après la question (3b) donc la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et :

$$\lim_{n\to+\infty} B_n = \frac{\pi^2}{6}$$

On dit que *la série de terme général* $\frac{1}{k^2}$ *converge* et on note :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$