Devoir à la Maison n°15

Soit n et c deux entiers naturels tels que $1 \leq c \leq n - 3$.

On possède une urne contenant n boules indiscernables au toucher et à la pesée, dont une est en argent, deux sont en bronze, c sont en cuivre, les autres sont en fer.

On pioche des boules dans l'urne une par une, sans remise.

On note Ω un univers modélisant cette expérience, sur lequel on définit les variables aléatoires suivantes :

- X : rang d'apparition de la boule d'argent.
- Y : rang d'apparition de la première boule de bronze.
- Z : rang d'apparition de la première boule de cuivre.

Partie A. Lois de X , Y , Z .

1. Déterminer $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$ et $Z(\Omega)$.

2. (a) Justifier que pour tout $k \in X(\Omega)$: $P(X \geq k) = \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k-1}}$.

Déterminer $P_{X \geq k}(X = k)$ et en déduire $P(X = k)$.

(b) Donner la loi de X , puis son espérance et sa variance.

3. (a) Soit $k \in Y(\Omega)$. Calculer $P(Y \geq k)$ comme ci-dessus puis $P_{Y \geq k}(Y = k)$.

(b) En déduire la loi de Y .

(c) Calculer l'espérance et la variance de Y .

4. (a) En procédant comme ci-dessus, déterminer la loi de Z .

(b) Vérifier que si $c = 1$ alors Z suit la même loi que X (ce qui se note $Z \sim X$),
et si $c = 2$ alors Z suit la même loi que Y (ce qui se note $Z \sim Y$).

Expliquer ceci.

La suite de ce devoir est consacrée au calcul de l'espérance et de la variance de Z .

On peut remarquer que les résultats sur Z ne dépendent pas de la présence des boules d'argent et de bronze, donc on peut supposer qu'il n'y en a pas et ainsi que $1 \leq c \leq n$. La loi de Z reste inchangée.

Partie B. Premier calcul de l'espérance de Z .

1. Pour $k \in Z(\Omega)$, exprimer $P(Z = k)$ comme quotient de deux coefficients du binôme.

Expliquer *a posteriori* cette formule.

2. Démontrer la formule :

$$\sum_{k=1}^{n-c+1} \binom{n-k}{c-1} = \binom{n}{c}.$$

3. En déduire que pour tous entier p et q tels que $0 \leq p \leq q$:

$$\sum_{j=p}^q \binom{j}{p} = \binom{q+1}{p+1}.$$

Puis que pour tous entier p, q, m tels que $0 \leq p \leq q \leq m$:

$$\sum_{k=m-q}^{m-p} \binom{m-k}{p} = \binom{q+1}{p+1}.$$

4. En déduire la valeur de l'espérance de Z . On pourra remarquer que $k = \sum_{i=1}^k 1$.

Partie C. Second calcul de l'espérance de Z .

On note Z_n (au lieu de Z) la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule de cuivre.

Dans cette partie on calcule l'espérance de Z_n sans utiliser la loi de Z_n . Elle est donc indépendante des parties précédentes.

On note C l'événement : la première boule est de cuivre.

1. Rappeler $Z_n(\Omega)$, donner $P(Z_n = 1)$.
2. Déterminer Z_c et son espérance.
3. On suppose $n > c$. Soit $k \in Z_n(\Omega)$ tel que $k > 1$.
  - (a) Justifier sans calcul que $P_{\bar{C}}(Z_n = k) = P(Z_{n-1} = k - 1)$.
  - (b) En déduire une expression de $P(Z_n = k)$ en fonction de $P(Z_{n-1} = k - 1)$.
4. Démontrer que pour tout $n > c$: $E(Z_n) = 1 + \left(1 - \frac{c}{n}\right)E(Z_{n-1})$
5. Calculer $E(Z_{c+1})$ puis $E(Z_{c+2})$.
Deviner une formule pour $E(Z_n)$ et la démontrer.

Partie D optionnelle. Calcul de la variance de Z .

En s'inspirant de l'une des méthodes de calcul de l'espérance, calculer la variance de Z .

Pour vérification on rappelle que grâce à la partie A le résultat est connu pour $c = 1$ et $c = 2$.

Pour la première méthode il faudra calculer $E(Z(Z-1))$ plutôt que $E(Z^2)$, et remarquer

$$\text{que } k(k-1) = \sum_{i=1}^{k-1} 2i.$$

Pour la seconde méthode on pourra calculer $V(Z_c)$, $V(Z_{c+1})$, $V(Z_{c+2})$ et $V(Z_{c+3})$ pour deviner la bonne formule.