Chapitre 11 : Géométrie dans l'espace

Table des matières

1 Vecteurs de l'espace

On étend à l'espace les définitions et propriétés introduites sur les vecteurs dans le plan : translation, égalité par l'existence d'un parallélogramme dans un plan contenant les deux vecteurs, colinéarité, relations de Chasles, règle du parallélogramme.

En particulier,

Théorème 1 (admis)**.**

Il existe un unique représentant d'un vecteur d'origine donnée : pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, et pour tout point A, il existe un unique point B tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

Les propriétés d'opérations (somme et produit par un réel) s'étendent également aux vecteurs de l'espace.

1.1 Colinéarité dans l'espace

La colinéarité dans l'espace est exactement la même notion que dans le plan : deux vecteurs sont colinéaires lorsqu'ils ont la même direction.
On a donc la définition suivante :

Définition 1 (Vecteurs colinéaires dans l'espace)**.**

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont colinéaires s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ (ou $\vec{v} = k\vec{u}$)

Le vecteur nul $\vec{0}$ est donc toujours colinéaire avec tous les vecteurs de l'espace.

▶ EXERCICE 1 rayer les mentions incorrectes

1. À quoi sert la colinéarité de deux vecteurs :
   - À obtenir des parallélogrammes
   - À obtenir des parallèles
   - À obtenir des carrés
   - À obtenir des points alignés
2. Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, alors
   - Les droites (AB) et (CD) sont parallèles
   - Les droites (AB) et (CD) sont sécantes
   - $ABCD$ est un parallélogramme
   - Les points A, B, C et D sont coplanaires
3. Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires, alors
   - Les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles
   - Les droites (AB) et (CD) sont sécantes
   - $ABCD$ n'est pas un parallélogramme
   - Les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires

Définition 2 (Droite par paramètre)**.**

Si A et B sont deux points de l'espace, la *droite* (AB) est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires, autrement dit : il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$
On dit que $\overrightarrow{AB}$ est **un** *vecteur directeur* de la droite (AB), t est le *paramètre*.

Il est clair qu'il y a une infinité de vecteurs directeurs de la droite (AB), mais $\vec{0}$ n'est pas un vecteur directeur car il n'a pas de direction !

Remarque 1.

Par ailleurs, dans l'espace, la donnée d'un point de la droite et d'un vecteur directeur détermine encore la droite, comme dans le plan.

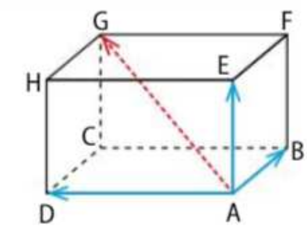
1.2 Combinaison linéaire de vecteurs

Définition 3 (Combinaison linéaire de vecteurs)**.**

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, on dit que le vecteur $\vec{w}$ est une **combinaison linéaire** de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ s'il existe deux réels α et β tels que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.
On dit aussi que les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont *coplanaires*.

▶ Exercice 2

Dans le parallélépipède ci-dessous,



1. Écrire le vecteur $\overrightarrow{AG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
2. Construire le point M tel que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG}$

Remarque 2.

A contrario, si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinaires et que le vecteur $\vec{w}$ n'est pas combinaison linéaire des deux autres, on dit que les trois vecteurs ne sont donc pas coplanaires ou bien *linéairement indépendants*.

Propriété 1 (Caractérisation de vecteurs linéairement indépendants)**.**

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants si et seulement si pour tous réels a, b et c,

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0} \implies a = b = c = 0$$

On définit alors les **vecteurs directeurs** d'un plan via *une définition paramétrée d'un plan*

Définition 4 (plan par relation paramétrique)**.**

Si A, B et C sont trois points de l'espace non alignés, alors le plan (ABC) est l'ensemble des points M pour lesquels il existe α et β réels tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ *i.e.* $\overrightarrow{AM}$ *est combinaison linéaire de* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$.
On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont des *vecteurs directeurs* du plan (ABC).

Propriété 2 (parallélisme de plans)**.**

Deux plans sont parallèles si et seulement si ils ont les mêmes vecteurs directeurs.

2 Repères de l'espace

Théorème 2 (Et définition d'un repère dans l'espace).

Soit O un point de l'espace et trois vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ non coplanaires. Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet $(x\,;\,y\,;\,z)$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
Les trois nombres x, y et z sont les *coordonnées* du point M dans le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$, on note donc $M\,(x\,;\,y\,;\,z)$.

Remarque 3.

Par extension, $(x\,;\,y\,;\,z)$ sont aussi les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. On note : $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

Propriété 3 (milieu d'un segment dans l'espace).

Dans un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$de l'espace, on a $A\,(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et $B\,(x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$, alors le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées $\boxed{I\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}\,;\,\dfrac{y_A+y_B}{2}\,;\,\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)}$

Propriété 4 (Formule des coordonnées d'un vecteur).

Dans un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$de l'espace, soient $A\,(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et $B\,(x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$, alors

$$\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}}$$

De même, pour les vecteurs, la linéarité est bien respectée :

Propriété 5 (Linéarité des coordonnées d'un vecteur).

Dans un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$de l'espace, on a $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$, alors

$$\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\end{pmatrix} \text{ et } \forall\alpha\in\mathbb{R}, \alpha\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha x\\\alpha y\\\alpha z\end{pmatrix}$$

Remarque 4.

Pourquoi ne peut-on pas utiliser le déterminant de deux vecteurs dans l'espace ?

▶ EXERCICE 3 **Utiliser la propriété 1**

Dans un repère de l'espace $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$, démontrer que les points $A\,(1\,;\,2\,;\,0)$, $B\,(-1\,;\,1\,;\,1)$, $C\,(1\,;\,4\,;\,1)$ et $D\,(3\,;\,-1\,;\,-3)$ sont coplanaires.

▶ EXERCICE 4 **Dans un repère non-orthonormé**

On se donne $ABCD$ un tétraèdre, I le milieu de $[AB]$, E et F les points définis par $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ et G le point tel que $BCGD$ soit un parallélogramme.
Démontrer que les points I, E, F et G sont coplanaires.

3 Représentations paramétriques de droites et de plans

3.1 Représentation paramétrique d'une droite

Théorème 3 (et définition)**.**

Dans un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ de l'espace, la droite $\mathcal{D}$ passant par $A\,(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ a pour *représentation paramétrique* le système

$$\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases} \quad \text{où } t \text{ est un nombre réel}$$

▶ EXERCICE 5 **Méthode 1**

Soit les points $A\,(-3\,;\,-1\,;\,2)$ et $B\,(-2\,;\,-2\,;\,6)$

1. Déterminer une équation paramétrique de la droite (AB).
2. Le point $C\,(3\,;\,5\,;\,-1)$ est-il aligné avec A et B ?

▶ EXERCICE 6 **Méthode 2**

Soit Δ la droite d'équation paramétrique $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = 8-2t \\ z = 6t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer un point appartenant à Δ ainsi qu'un vecteur directeur.
2. Δ est-elle parallèle à la droite $\mathscr{D}$ $\begin{cases} x = 2+s \\ y = -2s \\ z = 1+s \end{cases}$, avec $s \in \mathbb{R}$?
3. Si non, sont-elles sécantes ?

3.2 Représentation paramétrique d'un plan

Théorème 4 (et définition).

Dans un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ de l'espace, le plan $\mathcal{P}$ passant par $A\left(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A\right)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\alpha'\\\beta'\\\gamma'\end{pmatrix}$ a pour *représentation paramétrique* le système

$$\begin{cases} x = x_A + \alpha t + \alpha' t' \\ y = y_A + \beta t + \beta' t' \\ z = z_A + \gamma t + \gamma' t' \end{cases} \quad \text{où } t \text{ et } t' \text{ sont des nombres réels}$$

► **EXERCICE 7** **Positions relatives**

Étudier les positions relatives des éléments définis par :

$$(\mathcal{P})\begin{cases} x = 1 - 2t + 3t' \\ y = -2 + t - t' \\ z = 3 - t \end{cases} \qquad (d)\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 5 - 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \qquad (d')\begin{cases} x = 4 - t \\ y = -2 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

Attention, lors de la résolution de systèmes paramétriques, la même lettre désigne des nombres différents, donc il faudra utiliser des lettres différentes.

4 Le produit scalaire dans l'espace

4.1 Définition et propriétés

On a vu au chapitre précédent que deux vecteurs de l'espace définissent une direction de plan.

Définition 5 (Produit scalaire dans l'espace).

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.

Ainsi, toutes les propriétés du p.s. vues en début d'année s'appliquent ici aussi : expressions, commutativité, bilinéarité, etc...

Propriété 6 (Expressions du produit scalaire).

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\vec{u}\,;\,\vec{v}\right) = \vec{v}\cdot\vec{u}$ lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{v_1}$, où $\vec{v_1}$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur une droite dirigée par $\vec{u}$.

Comme dans le plan, le produit scalaire permet de définir un angle par son cosinus ($\cos\left(\vec{u}\,;\,\vec{v}\right) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}$), et en particulier, « un angle droit ».

Propriété 7 (Lien avec l'orthogonalité).

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $(\vec{u}\,;\,\vec{v}) \equiv \dfrac{\pi}{2} \mod 2\pi$ et on dit que les vecteurs sont *orthogonaux*.

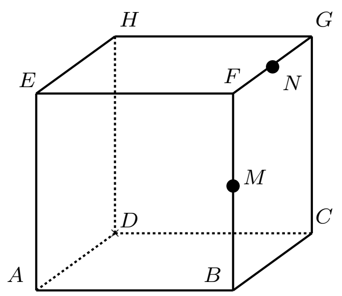
On a donc un lien direct entre le produit scalaire et l'orthogonalité de droites :

Propriété 8.

Deux droites (d) et (d') sont orthogonales si et seulement si leurs vecteurs directeurs respectifs sont orthogonaux.

▶ EXERCICE 8

Dans un cube $ABCDEFGH$ d'arête a tel que M et N sont les milieux respectifs des segments $[BF]$ et $[FG]$. Exprimer les produits scalaires en fonction de a.



a) $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{HF}$

b) $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD}$

c) $\overrightarrow{DG} \cdot \overrightarrow{AC}$

d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AN}$

e) $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BH}$

f) $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{AM}$

4.2 Dans un repère

Définition 6 (Repère orthonormal de l'espace).

On dit qu'un repère $\left(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k}\right)$ de l'espace est *orthonormal* si les vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont orthogonaux deux à deux et si $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\| = 1$. On notera RON un Repère OrthoNormal de l'espace.

Théorème 5 (Distance dans un RON).

Dans un repère $\left(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k}\right)$ orthonormé de l'espace, si $A\,(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et $B\,(x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$, alors

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$$

DÉMONSTRATION

$$AB = \sqrt{\|\overrightarrow{AB}\|^2} = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}}$$

□

Théorème 6 (Expression analytique du produit scalaire)**.**

Dans l'espace muni d'un RON $\left(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k}\right)$, si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$, alors une expression du produit scalaire est

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$$

En particulier,

$$\|\vec{u}\|^2=x^2+y^2+z^2$$

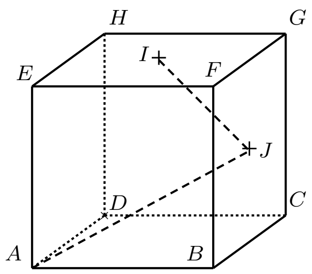
▶ EXERCICE 9 Calculs d'angles

On donne le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\\sqrt{2}\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$ dans un RON $\left(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k}\right)$.

1. Calculer les produits scalaires $\vec{u}\cdot\vec{\imath}$, $\vec{u}\cdot\vec{\jmath}$ et $\vec{u}\cdot\vec{k}$.
2. En déduire les valeurs en radians des angles entre ce vecteur et les axes du repère.

On rappelle que $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$ *donc* $\cos(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}$

▶ EXERCICE 10



Dans le cube $ABCDEFGH$ ci-contre, d'arête 1, les points I et J sont respectivement les centres des faces $EFGH$ et $BCGF$.
Déterminer l'angle $\widehat{AJI}$, arrondi au degré près.
On pourra se placer dans le repère orthonormal $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$.

▶ EXERCICE 11

On considère les points $A\,(2\,;\,1\,;\,-1)$, $B\left(\dfrac{3}{2}\,;\,1\,;\,-\dfrac{1}{2}\right)$ et $C\,(3\,;\,5\,;\,0)$.

Déterminer la nature du triangle ABC.

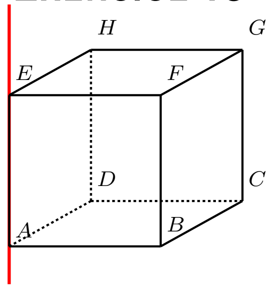
▶ EXERCICE 12

On donne les droites (d) et (d') sous forme paramétrique :

$$(d)\left\{\begin{array}{l}x=1+t\\y=2+2t\\z=-5-7t\end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}\quad\text{et}\quad(d')\left\{\begin{array}{l}x=5-t\\y=-1+4t\\z=t\end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}$$

Démontrer que les droites (d) et (d') sont orthogonales

▶ EXERCICE 13 Dans un cube



Démontrer que la droite (EC) est orthogonale au plan (AFH)
On pourra utiliser un repère orthonormal

▶ Exercice 14 — Étude d'une configuration

On considère les points $A\,(3\,;\,3\,;\,5)$, $B\,(3\,;\,3\,;\,-1)$, $C\,(3\,;\,1\,;\,-1)$ et $D\,(1\,;\,3\,;\,-1)$.

1. Montrer que le triangle BCD est rectangle.
2. Démontrer que la droite (AB) est perpendiculaire au plan (BCD).
3. Calculer la longueur AB.
4. En déduire le volume du tétraèdre $ABCD$.

5 Vecteur normal à un plan

Définition 7 (Vecteur normal à un plan)**.**

Un vecteur $\vec{n}$ est dit *normal* à un plan $\mathcal{P}$ s'il est non nul et orthogonal à tout vecteur directeur du plan.

Propriété 9 (Caractérisation)**.**

Un vecteur est normal à un plan si et seulement si il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan.

Démonstration

L'implication directe découle immédiatement de la définition. Nous allons démontrer la réciproque.

ROC Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs directeurs de ce plan non colinéaires, et $\vec{n}$ un vecteur orthogonal à ces deux vecteurs.

Comme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires, alors tout vecteur du plan $\vec{w}$ s'exprime en combinaison linéaire des deux : $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, on a alors

$$\begin{aligned}
\vec{n}\cdot\vec{w} &= \vec{n}\cdot(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}) \\
&= \alpha\vec{n}\cdot\vec{u} + \beta\vec{n}\cdot\vec{v} && \text{par bilinéarité} \\
&= \alpha\times 0 + \beta\times 0 && \text{comme } \vec{n}\cdot\vec{u}=0 \text{ et } \vec{n}\cdot\vec{v}=0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

donc $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur du plan $\mathcal{P}$, donc $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan.

□

La propriété au programme est : « une droite est orthogonale à toute droite du plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes du plan. »

On a les trois propriétés suivantes assez naturelles :

Propriété 10 (droite orthogonale à un plan)**.**

La droite (d) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si un vecteur directeur de (d) est normal au plan $\mathcal{P}$ (soit à deux de ses vecteurs directeurs).

▶ EXERCICE 15 **En utilisant une représentation paramétrique de plan**

Dans un RON de l'espace, on considère les points $A\,(1\,;\,-1\,;\,1)$, $B\,(-2\,;\,1\,;\,8)$ et $C\,(7\,;\,3\,;\,3)$.

1. (a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   (b) Montrer que les points A, B et C forment un plan dont on donnera une équation paramétrique.
2. On nomme $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ (avec a, b, et c réels) un vecteur normal au plan (ABC).
   (a) Montrer que les coordonnées de $\vec{n}$ vérifient le système : $\begin{cases} -3a+2b+7c=0 \\ 6a+4b+2c=0 \end{cases}$.
   (b) Montrer que ce système est équivalent au système :
   $$\begin{cases} a=c \\ b=-2c \end{cases}$$
   (c) Donner trois vecteurs normaux au plan (ABC).
   (d) Donner une expression générique d'un vecteur normal à (ABC).

Propriété 11.

Deux vecteurs normaux à un plan sont colinéaires.

Propriété 12.

Deux plans sont parallèles si et seulement si le vecteur normal de l'un est aussi normal à l'autre.
Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre

Cette dernière propriété permet de se ramener d'un problème entre des espaces à 2 dimensions à des relations sur des vecteurs (dont on sait reconnaître la colinéarité et l'orthogonalité).

6 Équation cartésienne d'un plan

6.1 Utilisation du vecteur normal

On a la propriété suivante, assez fondamentale :

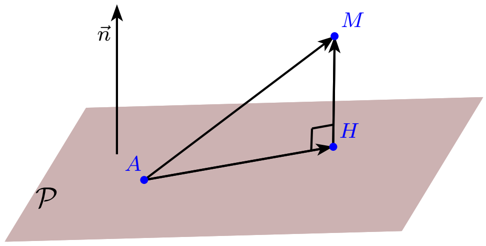
Propriété 13 (caractérisation d'un plan par un vecteur normal)**.**

Soit $(\mathcal{P})$ un plan de l'espace, soient $\vec{n}$ un vecteur normal de $(\mathcal{P})$ et A un point du plan. Le point M de l'espace appartient au plan $(\mathcal{P})$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$.

DÉMONSTRATION

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $M \in \mathcal{P}$, alors $\overrightarrow{AM}$ est un vecteur directeur de $(\mathcal{P})$ donc par définition, $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$, alors on décompose le vecteur $\overrightarrow{AM}$ en $\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}$, où H est le projeté orthogonal de M sur $(\mathcal{P})$.



On a alors $0 = \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{AH} + \vec{n} \cdot \overrightarrow{HM}$ par linéarité du produit scalaire, puis comme A et H sont des points de $(\mathcal{P})$, alors $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$.
Par conséquent, on a $\vec{n} \cdot \overrightarrow{HM} = 0$, avec les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{HM}$ qui sont colinéaires, cela signifie que (comme le cosinus de l'angle est égal à ± 1), que $\|\vec{n}\| = 0$ **ou** $\|\overrightarrow{HM}\| = 0$ et comme $\vec{n}$ est un vecteur normal, il n'est pas nul, donc c'est le vecteur $\overrightarrow{HM}$ qui est égal au vecteur nul. On a donc $H = M$ et donc $M \in (\mathcal{P})$.

$\square$

Et tout ce blabla pour en arriver à ce dernier point qui sera super utile en pratique :

6.2 Équation cartésienne d'un plan

On se rappelle que dans le plan, toute droite a une équation du type $ax + by + c = 0$, $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ vecteur directeur, et $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ un vecteur normal dans un repère orthonormé.

Théorème 7 (Équation cartésienne d'un plan)**.**

- Tout point $M\,(x\,;\,y\,;\,z)$ appartenant à un plan $(\mathcal{P})$ a ses coordonnées qui vérifient une équation du type $ax + by + cz + d = 0$
- L'ensemble des points $M\,(x\,;\,y\,;\,z)$ qui vérifient une équation du type $ax+by+cz+d = 0$ est un plan que l'on note $(\mathcal{P})$.

On dit alors que $(\mathcal{P})$ a pour *équation* $ax + by + cz + d = 0$, appelée *équation cartésienne du plan* et, de plus, $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est un vecteur normal du plan.

<u>DÉMONSTRATION</u>

On note $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ un repère orthonormal de l'espace.

Soit $(\mathcal{P})$ un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ passant par un point $A\,(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$.
$M\,(x\,;\,y\,;\,z)\in(\mathcal{P}) \iff \vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0 \iff a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0 \iff ax+by+cz+\underbrace{(-ax_A-by_A-cz_A)}_{=d}=0.$

□

▶ EXERCICE 16 — Équation cartésienne de plan

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation cartésienne du plan passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$.

   (a) $A\,(3\,;\,-1\,;\,2)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}$

   (b) $A\,(1\,;\,-1\,;\,0)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$

   (c) $A\,(-2\,;\,1\,;\,2)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}$

   (d) $A\left(\sqrt{2}\,;\,3\,;\,0\right)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$

2. Dans un repère orthonormal, on considère les points $A\,(-4\,;\,2\,;\,2)$, $B\,(1\,;\,1\,;\,-1)$ et $C\,(3\,;\,-1\,;\,1)$. Déterminer une équation cartésienne du plan passant par B et de vecteur normal $\overrightarrow{AC}$.
3. Pour chacun des plans ci-dessous, donner un vecteur normal et un point de l'espace appartenant au plan.

   (a) $2x+y-3z=0$

   (b) $-3x+y-2z=0$

   (c) $x-2z+4=0$

   (d) $3y-5z=0$

▶ EXERCICE 17 — Positions de plans et de droites

Dans chacun des cas suivants, déterminer si le plan et la droite se coupent et le cas échéant, déterminer les coordonnées du point d'intersection.

1. $x-y+z+1=0$ et $\begin{cases}x=1-2k\\y=-1+k\\z=3k\end{cases}$ où $k\in\mathbb{R}$
2. $x-3y+z-1=0$ et $\begin{cases}x=1+k\\y=-3k\\z=1+k\end{cases}$ où $k\in\mathbb{R}$
3. $x+y-2z-3=0$ et $\begin{cases}x=1+k\\y=2+k\\z=k\end{cases}$ où $k\in\mathbb{R}$
4. $x+y-2z+2=0$ et $\begin{cases}x=5+k\\y=1+k\\z=4+k\end{cases}$ où $k\in\mathbb{R}$
5. $x+y-2z-3=0$ et $\begin{cases}x=1+k\\y=2+k\\z=k\end{cases}$ où $k\in\mathbb{R}$
6. $x+y-2z+2=0$ et $\begin{cases}x=5+k\\y=1+k\\z=4-k\end{cases}$ où $k\in\mathbb{R}$

▶ EXERCICE 18 — positions de plans

Dans les exemples suivants, déterminer si les plans sont sécants et le cas échéant, déterminer une équation paramétrique de la droite d'intersection.

1. $x - y + 3z = 2$ et $2x + y - z = 1$
2. $x + y + z = 4$ et $2x + 2y + 2z = 8$
3. $2x - 3y + Z = 4$ et $x + 2y - z = -1$
4. $x - 3y + 2z = 5$ et $2x + y + 7z = 1$

MÉTHODE 1 (LIEN CARTÉSIEN / PARAMÉTRIQUE)

- Pour tester si un vecteur est normal à un plan déterminé par une équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$, on vérifie que le vecteur donné est colinéaire au vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.
- Pour tester si un vecteur est normal à un plan déterminé par un système d'équation paramétrique, on teste si le vecteur est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan (qui sont donnés par l'équation paramétrique du plan).

6.3 Distances point-droite / point-plan

Définition 8 (et propriété : Distance d'un point à un plan)**.**

Soit A un point de l'espace, et $\mathcal{P}$ un plan passant par un point B et de vecteur normal $\vec{n}$.
Le *projeté orthogonal* H de A sur le plan $\mathcal{P}$ est le point le plus proche de A sur le plan $\mathcal{P}$.

DÉMONSTRATION

ROC (Exercice)
Soit M un point du plan $\mathcal{P}$ différent de H. Montrer que $AM > AH$. On considérera les cas où $A \in \mathcal{P}$ et $A \notin \mathcal{P}$.

□

Propriété 14 (Calcul de la distance point-plan)**.**

Si H est le projeté orthogonal de A sur le plan $\mathcal{P}$ passant par B de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, alors la longueur AH est appelée *la distance du point A au plan $\mathcal{P}$*.

$$d(A, \mathcal{P}) = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

▶ EXERCICE 19 Démonstration

1. Justifier qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{pmatrix} x_H - x_A \\ y_H - y_A \\ z_H - z_A \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. En déduire une expression des coordonnées de H en fonction de celles de A et du vecteur normal.

2. Justifier que $ax_H + by_H + cz_H = ax_B + by_B + cz_B$.
3. En substituant les coordonnées de H dans la précédente égalité, en déduire que

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{BA} + \lambda \|\vec{n}\|^2 = 0$$

4. En déduire une expression de λ puis l'expression de $\|\overrightarrow{AH}\|$ attendue.

▶ EXERCICE 20 — Autre formule de distance point-plan

Soit $\mathcal{P}$ un plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ et $A\,(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$.
Démontrer que

$$\boxed{d(A, \mathcal{P}) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

▶ EXERCICE 21 — Projeté orthogonal

1. On cherche à calculer la distance entre un point $A\,(2\,;\,1\,;\,3)$ et un plan $\mathcal{P}$ défini par $x - 3y + 2z = 1$
   (a) Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$. *On cherchera l'équation paramétrique de la droite perpendiculaire à $\mathcal{P}$ passant par A, puis l'intersection.*
   (b) En déduire la distance entre le point A et le plan $\mathcal{P}$.
2. Même consigne entre le point $C\,(1\,;\,2\,;\,-1)$ et le plan $\Gamma\colon 2x - 3y + z = 1$.
3. Déterminer la distance entre le point $B\,(-1\,;\,2\,;\,1)$ et la droite $\Delta\colon \begin{cases} x = 2 + 3k \\ y = -1 + k \\ z = -2k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$.

Définition 9 (et propriété : Distance point-droite)**.**

Soient A un point de l'espace et d une droite de l'espace passant par un point B et de vecteur directeur $\vec{u}$.
Le projeté orthogonal H de A sur d est le point de la droite d le plus proche de A.

▶ EXERCICE 22

1. Écrire une équation paramétrique de la droite d.
2. Soit $M \in d$. Donner une expression de AM^2 en fonction de t. Quelle est le type de fonction obtenue ?
3. Montrer que cette fonction admet un minimum et le déterminer.
4. Interpréter le résultat obtenu.