$\boxed{\text{Correction DM 2}}$

Exercice 1 $\quad f_n(x) = x^n e^x$

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

1.a) $F_1(x) = (x-1)e^x$ sur $[0,1]$

F_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0,1]$

$F_1'(x) = e^x + (x-1)e^x = e^x(1+x-1) = xe^x$

$F_1'(x) = f_1(x)$ donc F_1 est une primitive de f_1 sur $[0,1]$

1b) $I_1 = F_1(1) - F_1(0) = 0 - (-1)e^0 = 1$

2°) $I_{n+1} = \int_0^1 \underbrace{x^{n+1}}_{v}\,\underbrace{e^x}_{u'}\,dx \qquad u'(x) = e^x,\ v(x) = x^{n+1} \qquad$ donc $\qquad u(x) = e^x,\ v'(x) = (n+1)x^n$

$$= \left[x^{n+1}\times e^x\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n e^x\,dx$$

Donc $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$

3°) $I_2 = e - 2\times I_1 = e-2$

4°) Sur $[0,1]$ $\quad 0 < e^x < e^1$ car exp est croissante sur $\mathbb{R}$.

donc $0 \leq x^n e^x \leq e\,x^n$ car $x^n \geq 0$

Donc par positivité de l'intégrale, on a

$$\int_0^1 0\,dx \leq I_n \leq e\int_0^1 x^n\,dx$$

Soit $\quad 0 \leq I_n \leq e\int_0^1 x^n\,dx$

5°) Or $\int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e}{n+1} = 0$

Donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

Exercice 2 $f_n(x) = x^2 e^{-2nx} = \left(x e^{-nx}\right)^2$.

Partie A $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

1°) a) $f_1'(x) = 2x e^{-2x} - 2x^2 e^{-2x} = 2x\, e^{-2x}(1-x)$

b)

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	e^{-2}	$\searrow$	0

$e^{-2x} > 0$
$2x(1-x)$ s'annule en 0 et en 1

c) par produit, $\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x) = +\infty$

d) $f_1(x) = x^2 e^{-2x} = (x e^{-x})^2 = \left(\dfrac{x}{e^x}\right)^2$

D'après le théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = 0$

2°) Une primitive de f_1 est donc $F_1 : x \longmapsto -e^{-2x}\left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}\right)$

Donc $I_1 = F_1(1) - F_1(0) = -e^{-2} \times \dfrac{5}{4} + e^0 \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{5}{e^2}$

Partie B : $n \in \mathbb{N}$.

1-a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^2 e^{-2nx} \geqslant 0$ donc

$I_n = \int_0^1 f_n$ est l'aire entre la courbe de f_n, l'axe des abscisses et la droite $x=0$ et $x=1$

b) Convergence ? décroissance ?

2°) a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0,1]$, $f_{n+1}(x) = x^2 \times e^{-2(n+1)x} = x^2 e^{-2nx} \times e^{-2x} = e^{-2x} f_n(x)$

Partie B : étude de la suite (I_n)

1. Soit n un entier naturel non nul.
   (a) Interpréter graphiquement la quantité I_n.
   (b) émettre alors une conjecture sur le sens de variation et sur la limite éventuelle de la suite (I_n). Expliciter la démarche qui a mené à cette conjecture.
2. (a) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0\,;\,1]$,
   $$f_{n+1}(x) = e^{-2x} f_n(x).$$
   (b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0\,;\,1]$,
   $$f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x).$$
   (c) Déterminer alors le sens de variation de la suite (I_n).
3. Soit n un entier naturel non nul.
   (a) Justifier que pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0\,;\,1]$,
   $$0 \leqslant f_n(x) \leqslant e^{-2nx}.$$
   (b) En déduire un encadrement de la suite (I_n), puis sa limite.

2°) b) $\forall x \in [0,1]$ $e^{-2x} \leqslant e^0 = 1$ car $x \longmapsto e^{-2x}$ est décroissante sur $[0,1]$.

Ainsi, $e^{-2x} f_n(x) \leqslant f_n(x)$ car $f_n(x) \geqslant 0$

$\Leftrightarrow$ $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$

2°) c) Par croissance de l'intégrale $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \leqslant I_n$ Donc (I_n) décroissante

3°) a) $\forall x \in [0,1]$, $x^2 \leqslant 1$ donc

$0 \leqslant f_n(x) \leqslant e^{-2nx} \times 1$ avec $\displaystyle\int_0^1 e^{-2nx}\,dx = \left[-\frac{e^{-2nx}}{2n}\right]_0^1 = \underbrace{-\frac{e^{-2n}}{2n} + \frac{1}{2n}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$

3°) b) donc par th. des gendarmes

$\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$