

Devoir surveillé n°7 :
Concours blanc de mathématiques

PCSI, Bellevue, 2023-2024

L'usage de la calculatrice est interdit. Les calculs qui vous sont nécessaires doivent être faits sur la copie.

Le travail doit être convenablement présenté. L'écriture, l'orthographe et la rédaction doivent être soignées. Aucune abréviation n'est autorisée.

Chaque question doit être traitée avec un souci de rigueur et de clarté. Sauf mention explicite, les réponses doivent être justifiées. Les résultats essentiels peuvent être encadrés ou soulignés. Il ne faut pas oublier que c'est la conclusion explicite d'un raisonnement qui doit achever la réponse à une question.

Il est demandé de rendre une copie indépendante pour chacune des trois parties. Et dans l'éventualité où une partie ne serait pas traitée, il est quand même demandé de rendre une copie correspondante à cette partie. Pour chaque copie, les feuilles doivent être numérotées et rangées dans le bon ordre.

PARTIE I : ANALYSE

Dans cette étude, on considère des équations de la forme

$$x^n + x^{n-1} + \dots + x = a$$

où $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On s'intéresse aux solutions réelles de ces équations.

Approximation numérique de la solution positive de $x^2 + x - 1 = 0$

1)a) Déterminer les solutions de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$. Justifier que l'une est négative et l'autre, notée r_2 , positive. Justifier que $r_2 \in]\frac{1}{2}, 1[$.

On considère la fonction

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x+1}.$$

1)b) Vérifier que les solutions de $x^2 + x - 1 = 0$ sont les points fixes de la fonction f .

1)c) Justifier que l'intervalle $[\frac{1}{2}, 1]$ est stable par f , c'est-à-dire que $f([\frac{1}{2}, 1]) \subset [\frac{1}{2}, 1]$.

1)d) Justifier que f est dérivable sur $[\frac{1}{2}, 1]$ et que $\forall x \in [\frac{1}{2}, 1], |f'(x)| \leq \frac{4}{9}$.

On introduit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}.$$

1)e) Calculer les quatre premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1)f) Justifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [\frac{1}{2}, 1]$.

1)g) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - r_2| \leq \frac{4}{9}|u_n - r_2|$.

1)h) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - r_2| \leq (\frac{4}{9})^n |u_0 - r_2|$. Que peut-on conclure sur la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Approximation numérique de la solution positive de $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$

2)a) Justifier que l'équation $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ admet une unique solution sur \mathbb{R} , notée r_3 .

2)b) Vérifier que $r_3 \in [\frac{1}{3}, 1]$.

On considère la fonction

$$g : x \mapsto \frac{1}{x^2 + x + 1}.$$

2)c) Justifier que la fonction g est bien définie et de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

2)d) Justifier que les solutions de l'équation $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ sont les points fixes de la fonction g .

2)e) Justifier que l'intervalle $[\frac{1}{3}, 1]$ est stable par g .

2)f) Calculer les fonctions dérivées g' et g'' . Déterminer le maximum de $|g'|$ sur $[\frac{1}{3}, 1]$. On le note k et on observe que $k < 1$.

On pourrait alors démontrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = g(v_n) \end{cases}$$

converge vers r_3 . On ne demande pas de le faire.

Solutions positives de la famille d'équations

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on pose

$$h_n : x \mapsto x^n + x^{n-1} + \dots + x - a = \left(\sum_{k=1}^n x^k \right) - a.$$

3)a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, démontrer que l'équation $x^n + x^{n-1} + \dots + x = a$ admet une unique solution dans \mathbb{R}_+^* que l'on notera r_n .

3)b) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Démontrer que si $n > a$ alors $r_n \in]0, 1[$.

3)c) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Démontrer que $h_{n+1}(r_n) > h_n(r_n)$ et en déduire que $r_n > r_{n+1}$.

3)d) Justifier que la suite $(r_n)_{n \geq 2}$ converge. On notera α sa limite.

3)e) Soit $N \geq 2$. Démontrer que $\forall n > N, 0 < r_n^n < r_N^n$.

3)f) Déterminer la limite de la suite $(r_n^n)_{n \geq 2}$.

3)g) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, (x-1)h_n(x) = x^{n+1} - (a+1)x + a$.

3)h) En déduire α en fonction de a .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels. Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, pour tout couple d'indices $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on note $A_{i,j}$ le (i, j) -ème coefficient de la matrice A , et on note A^T la matrice transposée de A . On note $GL_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $M_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices inversibles.

On rappelle que l'ensemble $M_n(\mathbb{R})$ est naturellement muni d'une structure de \mathbb{R} -espace vectoriel. On note \mathcal{E} la base canonique du \mathbb{R} -espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$.

La trace d'une matrice carrée et quelques-unes de ses propriétés

On définit la trace d'une matrice carrée par la somme de ses coefficients diagonaux. On définit donc l'application trace suivante :

$$\begin{aligned} \text{tr} : M_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\mapsto \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n A_{i,i} \end{aligned} .$$

- 1)a) Calculer la trace de la matrice identité I_n .
 - 1)b) Démontrer que l'application tr est linéaire.
 - 1)c) Démontrer que $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$, on a $\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$.
 - 1)d) Pour toutes matrices $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, calculer $\text{tr}(AB)$ en fonction des coefficients des matrices A et B et en déduire que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
 - 1)e) Démontrer que, $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \forall P \in GL_n(\mathbb{R})$, on a $\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(A)$.
- 2)a) Démontrer que l'application tr est surjective de $M_n(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R} .
 - 2)b) Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel $\text{Ker}(\text{tr})$ de $M_n(\mathbb{R})$.
 - 2)c) Pour cette question, on suppose que $n = 2$. Déterminer une \mathbb{R} -base de $\text{Ker}(\text{tr})$.

Une équation matricielle

Soient deux matrices $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. On considère l'équation matricielle (E) suivante :

$$-M + \text{tr}(M)A = B$$

dont l'inconnue est $M \in M_n(\mathbb{R})$.

On considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} f : M_n(\mathbb{R}) &\rightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto -M + \text{tr}(M)A \end{aligned} .$$

- 3) Montrer que l'application f est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$.
- 4) Pour cette question, on suppose que $n = 2$.
- 4)a) Déterminer la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{E}}(f)$ qui représente l'endomorphisme f relativement à la base canonique $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ de $M_2(\mathbb{R})$. Elle dépend des coefficients de la matrice A .
- 4)b) Calculer, en fonction des coefficients de A , le rang de f .

On suppose que $\text{tr}(A) \neq 1$.

- 5)a) Montrer que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(\text{tr})$.
- 5)b) Calculer $\text{Ker}(f)$.
- 5)c) En déduire que f est un automorphisme de $M_n(\mathbb{R})$.
- 5)d) Combien l'équation (E) a-t-elle de solutions dans $M_n(\mathbb{R})$?

6) Pour cette question, on suppose que $n = 2$ et que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

- 6)a) Déterminer la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{E}}(f)$ qui représente l'endomorphisme f relativement à la base canonique \mathcal{E} de $M_2(\mathbb{R})$.
6)b) Justifier que la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{E}}(f)$ est inversible et calculer son inverse.
6)c) En déduire l'unique solution de l'équation (E) .

On suppose que $\text{tr}(A) = 1$.

- 7)a) Démontrer que $\text{Ker}(f) \subset \text{Vect}(A)$. A-t-on $A \in \text{Ker}(f)$? Conclure sur $\text{Ker}(f)$ et donner sa dimension.
7)b) Démontrer que $\text{Ker}(\text{tr})$ est un supplémentaire de $\text{Ker}(f)$ dans $M_n(\mathbb{R})$ et déterminer pour toute matrice de $M_n(\mathbb{R})$ son unique décomposition comme la somme d'un vecteur de $\text{Ker}(f)$ et d'un vecteur de $\text{Ker}(\text{tr})$.
7)c) Démontrer que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(\text{tr})$ puis en déduire que $\text{Im}(f) = \text{Ker}(\text{tr})$.
8)a) On restreint f à $\hat{f} : \text{Ker}(\text{tr}) \rightarrow \text{Ker}(\text{tr}), M \mapsto f(M)$. Justifier que cette restriction est un automorphisme et donner son automorphisme réciproque.
8)b) On pose p le projecteur vectoriel sur $\text{Ker}(\text{tr})$ parallèlement à $\text{Ker}(f)$. Exprimer f à l'aide de p .
8)c) On suppose que $\text{tr}(B) = 0$. Déterminer une solution de l'équation (E) puis déterminer l'ensemble \mathcal{S} de toutes les solutions de (E) . Est-ce que \mathcal{S} est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$?

On note \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes. On note \mathbb{U} le sous-ensemble de \mathbb{C} constitué des nombres complexes de module égal à 1 c'est-à-dire $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| = 1\}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on note respectivement $\mathcal{R}e(z)$ et $\mathcal{I}m(z)$ la partie réelle et la partie imaginaire de z . On note $i\mathbb{R}$ le sous-ensemble de \mathbb{C} constitué des nombres complexes de partie réelle nulle c'est-à-dire $i\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } \mathcal{R}e(z) = 0\}$.

On appelle homographie toute application de la variable complexe à valeurs complexes de la forme

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

où a, b, c, d sont des nombres complexes tels que $ad - bc \neq 0$.

On note \mathcal{H} l'ensemble des homographies ainsi définies, c'est-à-dire qu'en posant $P = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4 \text{ tel que } ad - bc \neq 0\}$, on a $\mathcal{H} = \{z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \text{ avec } (a, b, c, d) \in P\}$.

En munissant le plan d'un repère orthonormé direct, on définit usuellement une correspondance entre l'ensemble des nombres complexes muni de ses opérations sur les nombres et l'ensemble des points du plan muni de ses transformations sur les points. A travers cette interprétation des nombres complexes, les homographies sont des transformations qui ont des propriétés géométriques caractéristiques : elles transforment les droites et les cercles en des droites ou des cercles.

Le but de cette partie est de le démontrer dans quelques cas particuliers et d'avoir ainsi de premières illustrations de cette propriété caractéristique des homographies.

Bijektivité des homographies

Soit $(a, b, c, d) \in P$. On pose

$$h : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

Les réponses aux questions ci-dessous pourront être discutées en fonction de a, b, c, d .

- 1)a) Déterminer le sous-ensemble D de \mathbb{C} sur lequel l'application h est bien définie.
- 1)b) Démontrer que h est injective sur D .
- 1)c) Pour tout $w \in \mathbb{C}$, déterminer l'ensemble $h^{-1}(\{w\})$ des antécédents de w par h .
- 1)d) En déduire l'image $h(D)$ de l'application h . La restriction $\hat{h} : D \rightarrow h(D), z \mapsto h(z)$ est donc une application bijective.
- 1)e) Donner la bijection réciproque de \hat{h} et observer que c'est une homographie.

Un exemple

On pose

$$k : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{1\} & \rightarrow & \mathbb{C} \setminus \{-i\} \\ z & \mapsto & i \frac{1+z}{1-z} \end{array}$$

- 2)a) Vérifier que k est une homographie.
- 2)b) Démontrer que $k(i\mathbb{R}) \subset \mathbb{U}$. Puis démontrer que $k(i\mathbb{R}) = \mathbb{U} \setminus \{-i\}$.
- 2)c) Démontrer que $k(\mathbb{U} \setminus \{1\}) \subset \mathbb{R}$. Puis calculer $k(\mathbb{U} \setminus \{1\})$.

Homographies préservant \mathbb{U}

Soient $\varphi \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $|\alpha| \neq 1$. On introduit les deux homographies suivantes :

$$m : z \mapsto \frac{e^{i\varphi}}{z} \quad \text{et} \quad n : z \mapsto e^{i\varphi} \frac{z + \alpha}{\bar{\alpha}z + 1}$$

- 3)a) Démontrer que $m(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.
- 3)b) Justifier que n est bien définie sur \mathbb{U} et démontrer que $n(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

Réciproquement, nous allons démontrer que les homographies préservant \mathbb{U} sont de la forme de m ou de n .

Soit $(a, b, c, d) \in P$. On pose $h : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$. On note D le domaine de définition de h . Pour simplifier on suppose que $\mathbb{U} \subset D$. Et on suppose que $h(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

4)a) Démontrer que $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, |z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\Re e(\bar{z}_1 z_2)$.

4)b) Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Démontrer que si $\forall \theta \in \mathbb{R}, z_1 + 2\Re e(e^{-i\theta} z_2) = 0$ alors $z_1 = 0$ et $z_2 = 0$.

5)a) Démontrer que $\forall \theta \in \mathbb{R}, |a|^2 + |b|^2 + 2\Re e(\bar{a} b e^{-i\theta}) = |c|^2 + |d|^2 + 2\Re e(\bar{c} d e^{-i\theta})$.

5)b) En déduire que $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2$ et $\bar{a} b = \bar{c} d$.

5)c) On suppose pour cette question que $a = 0$. En déduire qu'il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $h = z \mapsto \frac{e^{i\varphi}}{z}$.

5)d) On suppose pour cette question que $a \neq 0$.

Justifier d'abord que $(|a|^2 - |c|^2)(|a|^2 - |d|^2) = 0$. On en déduit que $|a| = |c|$ ou $|a| = |d|$.

Démontrer ensuite par l'absurde que $|a| \neq |c|$. On en déduit que $|a| = |d|$.

Enfin démontrer qu'il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $|\alpha| \neq 1$ et $h = z \mapsto e^{i\varphi} \frac{z+\alpha}{\bar{\alpha}z+1}$.