Corrigé devoir surveillé n°7 : Concours blanc de mathématiques

PCSI, Bellevue, 2023-2024

PCSI, Bellevue, 2023-2024
Corrigé devoir surveillé n°7 : Concours blanc de mathématiques

Partie I : Analyse

1)a) Le discriminant de l'équation $x^2+x-1=0$ est $\Delta = 1^2 - 4\times 1\times(-1) = 5$ donc cette équation admet deux solutions réelles qui sont $r_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. De plus, $0<1<4<5<9$ donc $0<1<2<\sqrt{5}<3$ donc $r_1<0$ et $r_2>0$, et puis $1<-1+\sqrt{5}<2$ donc $r_2 \in]\frac{1}{2},1[$.

1)b) On remarque d'abord que -1 n'est pas solution de l'équation $x^2+x-1=0$ car $1-1-1=-1\neq 0$.
Ensuite, étant donné $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, on a les équivalences suivantes : $f(x)=x \Leftrightarrow 1 = x(1+x) \Leftrightarrow 0 = x+x^2-1$.
Cela démontre que les solutions de $x^2+x-1=0$ sont les points fixes de la fonction f.

1)c) Soit $x\in[\frac{1}{2},1]$. On a $\frac{1}{2}\leq x\leq 1$ donc $0<\frac{3}{2}\leq x+1\leq 2$ donc $\frac{1}{2}\leq\frac{1}{x+1}\leq\frac{2}{3}\leq 1$ donc $f(x)\in[\frac{1}{2},1]$.
Cela démontre que l'intervalle $[\frac{1}{2},1]$ est stable par f.

1)d) La fonction f est rationnelle donc dérivable sur $[\frac{1}{2},1]$ et $\forall x\in[\frac{1}{2},1]$, $f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$ donc $|f'(x)| = \frac{1}{(x+1)^2}$. De plus, $\forall x\in[\frac{1}{2},1]$, on a $0<\frac{3}{2}\leq x+1\leq 2$ donc $0<\frac{9}{4}\leq(x+1)^2\leq 4$ donc $|f'(x)| = \frac{1}{(x+1)^2}\leq\frac{4}{9}$.

1)e) D'après la définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $u_0=1$ puis $u_1=f(u_0)=\frac{1}{2}$ puis $u_2=f(u_1)=\frac{2}{3}$ puis $u_3=f(u_2)=\frac{3}{5}$ puis $u_4=f(u_3)=\frac{5}{8}$.

1)f) On va démontrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$, l'assertion $H(n)=$ [le terme u_n est bien défini et $u_n\in[\frac{1}{2},1]$] est vraie.
Initialisation : D'après l'énoncé, $u_0=1$ donc $H(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose que $H(n)$ est vraie c'est-à-dire que u_n est bien défini et que $u_n\in[\frac{1}{2},1]$. Comme la fonction f est bien définie sur $[\frac{1}{2},1]\subset\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $u_{n+1}=f(u_n)$ est bien défini. De plus, $u_n\in[\frac{1}{2},1]$ et d'après 1)c), $f([\frac{1}{2},1])\subset[\frac{1}{2},1]$ donc $u_{n+1}=f(u_n)\in[\frac{1}{2},1]$. On a déduit que $H(n+1)$ est vraie.
D'après le principe de récurrence, $\forall n\in\mathbb{N}$, $H(n)$ est vraie c'est-à-dire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\in[\frac{1}{2},1]$.

1)g) D'après 1)d), la fonction f est dérivable sur $[\frac{1}{2},1]$ et $\forall x\in[\frac{1}{2},1]$, $|f'(x)|\leq\frac{4}{9}$. Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis, $\forall x_1,x_2\in[\frac{1}{2},1]$, $|f(x_1)-f(x_2)|\leq\frac{4}{9}|x_1-x_2|$.
Soit $n\in\mathbb{N}$. D'après 1)d) et 1)a), $u_n, r_2\in[\frac{1}{2},1]$. Donc $|f(u_n)-f(r_2)|\leq\frac{4}{9}|u_n-r_2|$. De plus d'après l'énoncé et 1)b), $f(u_n)=u_{n+1}$ et $f(r_2)=r_2$. On peut donc conclure que $|u_{n+1}-r_2|\leq\frac{4}{9}|u_n-r_2|$.
Cela démontre que $\forall n\in\mathbb{N}$, $|u_{n+1}-r_2|\leq\frac{4}{9}|u_n-r_2|$.

1)h) On va démontrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$, l'assertion $K(n)=[|u_n-r_2|\leq(\frac{4}{9})^n|u_0-r_2|]$ est vraie.
Initialisation : Comme $(\frac{4}{9})^0=1$, $K(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose que $K(n)$ est vraie c'est-à-dire que $|u_n-r_2|\leq(\frac{4}{9})^n|u_0-r_2|$. Comme $\frac{4}{9}>0$, par multiplication, on obtient $\frac{4}{9}|u_n-r_2|\leq(\frac{4}{9})^{n+1}|u_0-r_2|$. De plus d'après 1)g), $|u_{n+1}-r_2|\leq\frac{4}{9}|u_n-r_2|$. Par transitivité, on en déduit que $|u_{n+1}-r_2|\leq(\frac{4}{9})^{n+1}|u_0-r_2|$ c'est-à-dire que $K(n+1)$ est vraie.
D'après le principe de récurrence, $\forall n\in\mathbb{N}$, $|u_n-r_2|\leq(\frac{4}{9})^n|u_0-r_2|$.
De plus, comme $-1<\frac{4}{9}<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{4}{9})^n=0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{4}{9})^n|u_0-r_2|=0$. D'après le théorème de convergence par encadrement, on peut conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite r_2.

2)a) On pose $h : x\mapsto x^3+x^2+x-1$. C'est une fonction polynomiale donc elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $h'(x)=3x^2+2x+1$. Le discriminant est $2^2-4\times 3\times 1=-8<0$ donc h' se n'annule pas sur $\mathbb{R}$. De plus, $\forall x\in\mathbb{R}$, $h'(x)=3(x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3})=3(x^2+2\times\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}+\frac{1}{3})=3((x+\frac{1}{3})^2+\frac{2}{9})>0$ donc la fonction h est strictement croissante donc injective sur $\mathbb{R}$. Elle s'annule donc au plus une fois.
On remarque que $h(0)=-1\leq 0$ et $h(1)=2\geq 0$ donc 0 est une valeur intermédiaire entre $h(0)$ et $h(1)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $r_3\in[0,1]$ tel que $h(r_3)=0$.
Cela démontre que la fonction h s'annule exactement une fois sur $\mathbb{R}$ en r_3, c'est-à-dire que l'équation $x^3+x^2+x-1=0$ admet une unique solution r_3 sur $\mathbb{R}$.
OU
2)a) On pose $h : x\mapsto x^3+x^2+x-1$. C'est une fonction polynomiale donc elle est continue et dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $h'(x)=3x^2+2x+1$. Le discriminant est $2^2-4\times3\times1=-8<0$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $h'(x)=3(x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3})=3(x^2+2\times\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}+\frac{1}{3})=3((x+\frac{1}{3})^2+\frac{2}{9})>0$ donc la fonction h est strictement

croissante sur $\mathbb{R}$.
D'après le théorème de la bijection réciproque, $h(\mathbb{R})$ est un intervalle et h réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $h(\mathbb{R})$.
Pour tout $x<0$, $h(x)=x^3(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3})$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=-\infty$ et par ailleurs, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$. Donc comme $h(\mathbb{R})$ est un intervalle, $h(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.
On conclut que h réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ c'est-à-dire que $\forall y\in\mathbb{R}, \exists! x\in\mathbb{R}$ tel que $y=h(x)$. En particulier, il existe un unique $r_3\in\mathbb{R}$ tel que $0=h(r_3)$, c'est-à-dire que l'équation $x^3+x^2+x-1=0$ admet une unique solution r_3 sur $\mathbb{R}$.

2)b) On remarque que $h(\frac{1}{3})=-\frac{14}{27}<0$ donc, comme h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\forall x<\frac{1}{3}$, $h(x)<h(\frac{1}{3})<0$ donc $h(x)\neq 0$. Et $h(1)=1+1+1-1=2>0$ donc, comme h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\forall x>1$, $h(x)>h(1)>0$ donc $h(x)\neq 0$. Cela démontre que h ne s'annule pas sur $]-\infty,\frac{1}{3}[\cup]1,+\infty[$, c'est-à-dire que $r_3\notin]-\infty,\frac{1}{3}[\cup]1,+\infty[$. On peut conclure que $r_3\in[\frac{1}{3},1]$.
OU
On remarque que $h(\frac{1}{3})=-\frac{14}{27}<0$ et que $h(1)=1+1+1-1=2>0$ donc $h(\frac{1}{3})<h(r_3)<h(1)$. Comme dans 2)a), toujours d'après le théorème de la bijection réciproque, la bijection réciproque h^{-1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $h^{-1}(h(\frac{1}{3}))<h^{-1}(h(r_3))<h^{-1}(h(1))$ c'est-à-dire $\frac{1}{3}<r_3<1$. On peut conclure que $r_3\in[\frac{1}{3},1]$.

2)c) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x^2+x+1=x^2+2\times\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$ donc la fonction g est bien définie sur $\mathbb{R}$. De plus, c'est une fonction rationnelle donc elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2)d) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a les équivalences suivantes : $g(x)=x\Leftrightarrow 1=x(x^2+x+1)\Leftrightarrow 0=x^3+x^2+x-1$.
Cela démontre que les points fixes de la fonction g sont les solutions de $x^3+x^2+x-1=0$ sur $\mathbb{R}$.

2)e) Soit $x\in[\frac{1}{3},1]$. On a $0\leq\frac{1}{3}\leq x\leq 1$ donc $\frac{1}{9}\leq x^2\leq 1$ et par somme $\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+1\leq x^2+x+1\leq 1+1+1$ c'est-à-dire $0<\frac{13}{9}\leq x^2+x+1\leq 3$. Donc $\frac{1}{3}\leq g(x)\leq\frac{9}{13}\leq 1$.
On a démontré que $\forall x\in[\frac{1}{3},1]$, $g(x)\in[\frac{1}{3},1]$ c'est-à-dire que l'intervalle $[\frac{1}{3},1]$ est stable par g.

2)f) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g'(x)=\frac{-(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$ puis $\forall x\in\mathbb{R}$, $g''(x)=\frac{-2(x^2+x+1)^2+2(2x+1)^2(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^4}=\frac{6x^2+6x}{(x^2+x+1)^3}=\frac{6x(x+1)}{(x^2+x+1)^3}$.
Par conséquent, pour tout $x\in[\frac{1}{3},1]$, $g''(x)>0$ donc la fonction g' est strictement croissante sur $[\frac{1}{3},1]$. On a $g'(\frac{1}{3})=\frac{-\frac{5}{3}}{(\frac{13}{9})^2}=-\frac{135}{169}$ et $g'(1)=-\frac{1}{3}$. Donc pour tout $x\in[\frac{1}{3},1]$, $g'(\frac{1}{3})\leq g'(x)\leq g'(1)\leq 0$ donc $|g'(x)|=-g'(x)\leq -g'(\frac{1}{3})=|g'(\frac{1}{3})|$. Le maximum de $|g'|$ sur $[\frac{1}{3},1]$ est donc $k=|g'(\frac{1}{3})|=-g'(\frac{1}{3})=\frac{135}{169}<1$.

3)a) Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geq 2$. La fonction h_n est une fonction polynomiale donc elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $h_n'(x)=\sum_{k=1}^n kx^{k-1}=nx^{n-1}+\cdots+2x+1>0$ donc la fonction h_n est strictement croissante donc injective sur $\mathbb{R}_+$. Elle s'annule donc au plus une fois sur $\mathbb{R}_+$.
On remarque que $h(0)=-a\leq 0$ et $h(a)=\sum_{k=2}^n a^k\geq 0$ car $n\geq 2$, donc 0 est une valeur intermédiaire entre $h(0)$ et $h(a)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $r_n\in[0,a]$ tel que $h(r_n)=0$.
Et comme $h(0)=-a\neq 0$, $r_n\neq 0$. Cela démontre que la fonction h_n s'annule exactement une fois sur $\mathbb{R}_+^*$ en r_n, c'est-à-dire que l'équation $x^n+x^{n-1}+\cdots+x=a$ admet une unique solution r_n sur $\mathbb{R}_+^*$.

3)b) On suppose que $n>a$. Comme la fonction h_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, $\forall x\geq 1$, $h_n(x)\geq h_n(1)=n-a>0$ donc $h_n(x)\neq 0$ donc $x\neq r_n$. Par ailleurs, d'après 3)a), $r_n>0$. On en déduit que $r_n\in]0,1[$.

3)c) On a $h_{n+1}(r_n)=(\sum_{k=1}^{n+1} r_n^k)-a=r_n^{n+1}+(\sum_{k=1}^n r_n^k)-a=r_n^{n+1}+h_n(r_n)>h_n(r_n)$ car $r_n>0$ d'après 3)a).
Par définition de r_n et r_{n+1}, $h_n(r_n)=0=h_{n+1}(r_{n+1})$. Donc $h_{n+1}(r_n)>h_{n+1}(r_{n+1})$.
Si $r_n\leq r_{n+1}$, comme $r_n\geq 0$ et, d'après 3)a), la fonction h_{n+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, alors $h_{n+1}(r_n)\leq h_{n+1}(r_{n+1})$. C'est en contradiction avec $h_{n+1}(r_n)>h_{n+1}(r_{n+1})$.
On peut conclure que $r_n>r_{n+1}$.

3)d) D'après 3)c), la suite $(r_n)_{n\geq 2}$ est décroissante. Et d'après 3)a), elle est minorée par 0. Donc, d'après le théorème de la limite des suites monotones, la suite $(r_n)_{n\geq 2}$ converge, et d'après l'énoncé sa limite est notée α.

3)e) Soit $n>N$. Comme $N\geq 2$ et que la suite $(r_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante, alors $r_n<r_N$. De plus d'après 3)a), $0<r_n$. Donc $0<r_n<r_N$. Par produit, $0<r_n^n<r_N^n$.

3)f) Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq 2$ et $N > a$. D'après 3)b), $r_N \in]0,1[$. Donc $\lim_{n \to +\infty} r_N^n = 0$. De plus, d'après 3)e), $\forall n > N$, $0 < r_n^n < r_N^n$. Donc, d'après le théorème de convergence par encadrement, $\lim_{n \to +\infty} r_n^n = 0$.

3)g) Soit $x \in \mathbb{R}$. on a $(x-1)h_n(x) = (x-1)((\sum_{k=1}^n x^k) - a) = (\sum_{k=1}^n x^{k+1}) - ax - (\sum_{k=1}^n x^k) + a = (\sum_{j=2}^{n+1} x^j) - ax - (\sum_{k=1}^n x^k) + a = x^{n+1} + (\sum_{j=2}^n x^j) - ax - x - (\sum_{k=2}^n x^k) + a = x^{n+1} - (a+1)x - a$.

3)h) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et $n > a$. D'après 3)g), $(r_n - 1)h_n(r_n) = r_n^{n+1} - (a+1)r_n + a$. Or, par définition de r_n, $h_n(r_n) = 0$ donc $0 = r_n^{n+1} - (a+1)r_n + a = r_n \times r_n^n - (a+1)r_n + a$. Or, d'après 3)d) et 3)f), $\lim_{n \to +\infty} r_n = \alpha$ et $\lim_{n \to +\infty} r_n^n = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} r_n \times r_n^n - (a+1)r_n + a = -(a+1)\alpha + a$. Par unicité de la limite, $0 = -(a+1)\alpha + a$ et comme $a > 0$, $a + 1 \neq 0$ donc $\alpha = \frac{a}{a+1}$.

Partie II : Algèbre linéaire

1)a) On a directement : $\mathrm{tr}(I_n) = \sum_{i=1}^n (I_n)_{i,i} = \sum_{i=1}^n 1 = n$.
1)b) Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, le (i,i)-ème coefficient de la matrice $\lambda A + \mu B$ est $\lambda A_{i,i} + \mu B_{i,i}$, donc :

$$\mathrm{tr}(\lambda A + \mu B) = \sum_{i=1}^n (\lambda A_{i,i} + \mu B_{i,i}) = \lambda \sum_{i=1}^n A_{i,i} + \mu \sum_{i=1}^n B_{i,i} = \lambda \mathrm{tr}(A) + \mu \mathrm{tr}(B),$$

donc l'application tr est linéaire.
1)c) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $(A^T)_{i,i} = A_{i,i}$, donc :

$$\mathrm{tr}(A^T) = \sum_{i=1}^n (A^T)_{i,i} = \sum_{i=1}^n A_{i,i} = \mathrm{tr}(A).$$

1)d) Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^n A_{i,k}B_{k,j}$, donc :

$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{i,k}B_{k,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n B_{k,i}A_{i,k}.$$

On en déduit directement, par interversion des sommes :

$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n B_{k,i}A_{i,k} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n B_{k,i}A_{i,k} = \mathrm{tr}(BA).$$

1)e) Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $P \in GL_n(\mathbb{R})$. D'après le résultat ci-dessus :

$$\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}((P^{-1}A) \times P) = \mathrm{tr}(P \times (P^{-1}A)) = \mathrm{tr}((PP^{-1})A)) = \mathrm{tr}(I_n A) = \mathrm{tr}(A).$$

2)a) Par définition, $\mathrm{Im}(\mathrm{tr}) \subset \mathbb{R}$.
Réciproquement, soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a : $\mathrm{tr}(\lambda E_{1,1}) = \lambda$, donc $\lambda \in \mathrm{Im}(\mathrm{tr})$. Donc $\mathbb{R} \subset \mathrm{Im}(\mathrm{tr})$.
Donc $\mathrm{Im}(\mathrm{tr}) = \mathbb{R}$, donc l'application tr est surjective.
2)b) D'après le théorème du rang :

$$\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})) + \dim(\mathrm{Im}(\mathrm{tr})) = \dim(M_n(\mathbb{R})),$$

donc, d'après le résultat de la question précédente : $\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})) = \dim(M_n(\mathbb{R})) - \dim(\mathbb{R}) = n^2 - 1$.
2)c) Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} A \in \mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) &\Leftrightarrow \mathrm{tr}(A) = 0 \\ &\Leftrightarrow A_{1,1} + A_{2,2} = 0 \\ &\Leftrightarrow A_{2,2} = -A_{1,1} \\ &\Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & -A_{1,1} \end{pmatrix} = A_{1,1}(E_{1,1} - E_{2,2}) + A_{1,2}E_{1,2} + A_{2,1}E_{2,1}, \end{aligned}$$

donc la famille $\mathcal{F} = (E_{1,1} - E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1})$ est génératrice de Ker(tr). Comme de plus $\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})) = 2^2 - 1 = 3 = \mathrm{Card}(\mathcal{F})$, la famille $\mathcal{F}$ est une base de Ker(tr).

3) Soient $M, N \in M_n(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Comme tr est linéaire, on a :

$$\begin{array}{rcl} f(\lambda M + \mu N) & = & -(\lambda M + \mu N) + \mathrm{tr}(\lambda M + \mu N)A \\ & = & -\lambda M - \mu N + \lambda \mathrm{tr}(M) + \mu \mathrm{tr} N)A \\ & = & \lambda(-M + \mathrm{tr}(M)A) + \mu(-N + \mathrm{tr}(N)A) \\ & = & \lambda f(M) + \mu f(N) \end{array},$$

donc f est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$.

4)a) On a :

- $f(E_{1,1}) = -E_{1,1} + \mathrm{tr}(E_{1,1})A = -E_{1,1} + A = \begin{pmatrix} A_{1,1} - 1 & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}$, donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f(E_{1,1})) = \begin{pmatrix} A_{1,1} - 1 \\ A_{1,2} \\ A_{2,1} \\ A_{2,2} \end{pmatrix}$,
- $f(E_{1,2}) = -E_{1,2} + \mathrm{tr}(E_{1,2})A = -E_{1,2}$, donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f(E_{1,2})) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,
- $f(E_{2,1}) = -E_{2,1} + \mathrm{tr}(E_{2,1})A = -E_{2,1}$, donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f(E_{2,1})) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$,
- $f(E_{2,2}) = -E_{2,2} + \mathrm{tr}(E_{2,2})A = -E_{2,2} + A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} - 1 \end{pmatrix}$, donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f(E_{2,2})) = \begin{pmatrix} A_{1,1} \\ A_{1,2} \\ A_{2,1} \\ A_{2,2} - 1 \end{pmatrix}$,

donc : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} A_{1,1} - 1 & 0 & 0 & A_{1,1} \\ A_{1,2} & -1 & 0 & A_{1,2} \\ A_{2,1} & 0 & -1 & A_{2,1} \\ A_{2,2} & 0 & 0 & A_{2,2} - 1 \end{pmatrix}$.

4)b) D'après la méthode du pivot : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f) \underset{C_4 \leftarrow C_4 - C_1}{\sim} \begin{pmatrix} A_{1,1} - 1 & 0 & 0 & 1 \\ A_{1,2} & -1 & 0 & 0 \\ A_{2,1} & 0 & -1 & 0 \\ A_{2,2} & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 + A_{1,2}C_2 + A_{2,1}C_3 + A_{2,2}C_4}{\sim}$ $\begin{pmatrix} A_{1,1} + A_{2,2} - 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, donc la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f)$ a trois pivots si $A_{1,1} + A_{2,2} - 1 = 0$, quatre sinon ; c'est-à-dire : $\mathrm{rg}(f) = 3$ si $\mathrm{tr}(A) = 1$, $\mathrm{rg}(f) = 4$ sinon.

5)a) Soit $M \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors $-M + \mathrm{tr}(M)A = 0_n$, donc $M = \mathrm{tr}(M)A$. Comme l'application tr est linéaire, on obtient $\mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(M)\mathrm{tr}(A)$, donc, comme $\mathrm{tr}(A) \neq 1$, $\mathrm{tr}(M) = 0$. Donc $M \in \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$. Donc $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$.
5)b) Soit $M \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors $-M + \mathrm{tr}(M)A = 0_n$ et de plus, d'après le résultat de la question précédente, $\mathrm{tr}(M) = 0$. Donc $-M = 0_n$, donc $M = 0_n$. Donc $\mathrm{Ker}(f) \subset \{0_n\}$; réciproquement, comme $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathrm{R})$, $\{0_n\} \subset \mathrm{Ker}(f)$. Donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0_n\}$.
5)c) D'après le résultat ci-dessus, l'application f est injective. Comme f est un endomorphisme de l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie, f est donc bijective, c'est-à-dire que f est un automorphisme de $M_n(\mathbb{R})$.
5)d) L'équation (E) s'écrit $f(M) = B$. Comme f est bijective, cette équation a exactement une solution, à savoir $f^{-1}(B)$.

6)a) D'après le résultat de la question 4)a) : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
6)b) Comme $\mathrm{tr}(A) = 2 + 1 = 3 \neq 1$, d'après 5)c), f est un automorphisme et par conséquent, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f)$ est inversible. On détermine son inverse à l'aide de la méthode du pivot :

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f)\mid I_4) \quad \underset{C_4\leftarrow C_4-C_1}{\sim}\quad & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\\
\underset{C_1\leftarrow C_1+C_2-C_3+C_4}{\sim}\quad & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\\
\underset{C_1\leftarrow \frac{C_1}{2},\ C_2\leftarrow -C_2,\ C_3\leftarrow -C_3,\ C_4\leftarrow -C_4}{\sim}\quad & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1\end{array}\right)\\
\underset{C_4\leftarrow C_4+C_1}{\sim}\quad & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\end{array}\right),
\end{aligned}
$$

donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 0 & -1 & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

6)c) D'après le résultat de la question 5)d), l'unique solution de l'équation (E) est : $f^{-1}(B)$, avec :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f^{-1}(B)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f)^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 0 & -1 & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\-6\\-1\end{pmatrix},$$

c'est-à-dire : $f^{-1}(B) = \begin{pmatrix} 4 & 2\\ -6 & -1\end{pmatrix}$.

7)a) Soit $M \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors $f(M) = 0_n$, donc $M = \mathrm{tr}(M)A \in \mathrm{Vect}(A)$. Donc $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Vect}(A)$.
Réciproquement, $f(A) = -A + \mathrm{tr}(A)A = -A + A = 0_n$, donc $A \in \mathrm{Ker}(f)$. Comme $\mathrm{Ker}(f)$ est un espace vectoriel, on a donc $\mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
Donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(A)$. Comme $A \neq 0_n$ (car $\mathrm{tr}(0_n) = 0 \neq 1 = \mathrm{tr}(A)$), la famille (A) est une base de $\mathrm{Ker}(f)$ donc $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$, c'est-à-dire que $\mathrm{Ker}(f)$ est une droite vectorielle.
7)b) Soit $M \in G = \mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) \cap \mathrm{Ker}(f)$. Alors $\mathrm{tr}(M) = 0$ et $f(M) = 0_n$, donc $M = \mathrm{tr}(M)A = 0.A = 0_n$. Donc, puisque G est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_n\}$. Donc $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont en somme directe.
Par conséquent, d'après la formule de Grassmann et les résultats des questions 2)b) et 7)a) :

$$\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) + \mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = (n^2-1)+1 = n^2 = \dim(M_n(\mathbb{R})),$$

donc $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) + \mathrm{Ker}(f) = M_n(\mathbb{R})$.
Donc $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont supplémentaires dans $M_n(\mathbb{R})$.
Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$, on cherche $M_1 \in \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$ et $M_2 \in \mathrm{Ker}(f)$ tels que $M = M_1 + M_2$. Comme $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(A)$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M_2 = \lambda A$, et donc tel que $M_1 = M - \lambda A$. Par conséquent, comme $\mathrm{tr}(A) = 1$, on a :

$$0 = \mathrm{tr}(M_1) = \mathrm{tr}(M) - \lambda\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(M) - \lambda,$$

donc $\lambda = \mathrm{tr}(M)$, donc $M_1 = M - \mathrm{tr}(M)A$ et $M_2 = \mathrm{tr}(M)A$.
7)c) Soit $M \in \mathrm{Im}(f)$. Soit $N \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $M = f(N)$, alors, comme $\mathrm{tr}(A) = 1$: $\mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(f(N)) = \mathrm{tr}(-N + \mathrm{tr}(N)A) = -\mathrm{tr}(N) + \mathrm{tr}(N) = 0$. Donc $M \in \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$. Donc $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$.
De plus, le théorème du rang appliqué à l'application f s'écrit : $\mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(M_n(\mathbb{R}))$, donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rg}(f) = \dim(M_n(\mathbb{R})) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = n^2 - 1 = \dim(\mathrm{Ker}(tr))$.
Donc $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$.

8)a) Soit $M \in \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$. On a $\hat{f}(M) = -M + \mathrm{tr}(M)A = -M$, donc $\hat{f} = -\mathrm{Id}_{\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})}$. Donc $\hat{f}$ est un automorphisme de $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$, et $\hat{f}^{-1} = \hat{f}$.
8)b) Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. D'après le résultat de la question 7)b) : $p(M) = M - \mathrm{tr}(M)A = -f(M)$, donc $p = -f$, et

donc $f = -p$.
8)c) On a $f(-B) = -(-B) + \mathrm{tr}(-B)A = B$, donc $-B \in \mathcal{S}$. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$:

$$M \in \mathcal{S} \Leftrightarrow f(M) = B = f(-B) \Leftrightarrow f(M+B) = 0_n \Leftrightarrow M + B \in \mathrm{Ker}(f),$$

donc, puisque $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(A)$:

$$\mathcal{S} = \{-B + \lambda A \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Si $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$, alors $0_n \in \mathcal{S}$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $B = \lambda A$. Réciproquement, s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $B = \lambda A$, alors $\mathcal{S} = \mathrm{Vect}(A)$, donc $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.
Donc $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $B = \lambda A$. De plus, $\mathrm{tr}(B) = 0$ et $\mathrm{tr}(A) = 1$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $B = \lambda A$ si et seulement si $\lambda = 0$. On peut conclure que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $B = 0_n$.

Partie III : Homographies

1)a) On fait une disjonction de cas :
- Si $c \neq 0$, l'ensemble de définition de h est $D = \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$.
- Si $c = 0$, alors $0 \neq ad - bc = ad$ donc $d \neq 0$ et l'ensemble de définition de h est $D = \mathbb{C}$.

1)b) Soient $z_1, z_2 \in D$. On a les implications suivantes :

$$\begin{array}{ll} & h(z_1) = h(z_2) \\ \Rightarrow & \frac{az_1+b}{cz_1+d} = \frac{az_2+b}{cz_2+d} \\ \Rightarrow & (az_1+b)(cz_2+d) = (az_2+b)(cz_1+d) \\ \Rightarrow & acz_1z_2 + adz_1 + bcz_2 + bd = acz_1z_2 + adz_2 + bcz_1 + bd \\ \Rightarrow & adz_1 + bcz_2 = adz_2 + bcz_1 \\ \Rightarrow & (ad-bc)z_1 = (ad-bc)z_2 \\ \Rightarrow & z_1 = z_2 \quad car\ ad - bc \neq 0 \end{array}$$

On a démontré que l'application h est injective sur D.

1)c) Soit $w \in \mathbb{C}$. Étant donné $z \in D$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{ll} & w = h(z) \\ \Leftrightarrow & w = \frac{az+b}{cz+d} \\ \Leftrightarrow & w(cz+d) = az + b \\ \Leftrightarrow & wcz - az = b - wd \\ \Leftrightarrow & z(cw-a) = -dw + b \quad (\star) \end{array}$$

On fait une disjonction de cas :
- Si $c \neq 0$ et $w = \frac{a}{c}$ alors $(\star) \Leftrightarrow 0 = \frac{-ad+bc}{c}$. Or, par hypothèse, $ad - bc \neq 0$ donc cette équation n'a pas de solution. Dans ce cas, w n'a pas d'antécédent par h c'est-à-dire que $h^{-1}(\{w\}) = \emptyset$.
- Si $c \neq 0$ et $w \neq \frac{a}{c}$ alors $(\star) \Leftrightarrow z = \frac{-dw+b}{cw-a}$. Dans ce cas, w a un unique antécédent par h qui est $\frac{-dw+b}{cw-a}$ c'est-à-dire que $h^{-1}(\{w\}) = \{\frac{-dw+b}{cw-a}\}$.
- Si $c = 0$ alors $0 \neq ad - bc = ad$ donc $a \neq 0$ et $cw - a = -a \neq 0$ et par conséquent, $(\star) \Leftrightarrow z = \frac{-dw+b}{cw-a}$. Dans ce cas aussi, w a un unique antécédent par h qui est $\frac{-dw+b}{cw-a}$ c'est-à-dire que $h^{-1}(\{w\}) = \{\frac{-dw+b}{cw-a}\}$.

1)d) D'après la question précédente,
- Si $c \neq 0$, l'image de D par h est $h(D) = \{w \in \mathbb{C}$ tel que $\exists z \in D : w = h(z)\} = \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$
- Si $c = 0$, l'image de D par h est $h(D) = \{w \in \mathbb{C}$ tel que $\exists z \in D : w = h(z)\} = \mathbb{C}$.

1)e) D'après les calculs des questions 1)a), 1)c) et 1)d),
- Si $c \neq 0$, la bijection réciproque de $\hat{h}$ est

$$\hat{h}^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\} & \to & \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \\ w & \mapsto & \frac{-dw+b}{cw-a} \end{array}$$

- Si $c = 0$, la bijection réciproque de $\hat{h}$ est

$$\begin{array}{cccc} \hat{h}^{-1}: & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & w & \mapsto & \frac{-dw+b}{cw-a} \end{array}$$

Et comme $(d-) \times (-a) - cb = ad - bc \neq 0$, dans les deux cas, $\hat{h}^{-1}$ est bien une homographie.

2)a) Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $k(z) = i\frac{1+z}{1-z} = \frac{iz+z}{-z+1}$ et $i \times 1 - (-1) \times i = 2i \neq 0$ donc k est bien une homographie.

2)b) Soit $z \in i\mathbb{R}$. Alors il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $z = iy$. Alors $|k(z)| = |i| \times \frac{|1+iy|}{|1-iy|} = 1 \times 1 = 1$ car $y \in \mathbb{R}$ donc $|1 - iy| = |\overline{1 + iy}|$. On a obtenu que $|k(z)| = 1$ c'est-à-dire que $k(z) \in \mathbb{U}$. Cela démontre que $k(i\mathbb{R}) \subset \mathbb{U}$.
De plus, d'après les résultats des questions 1), reprises par l'énoncé, $-i$ n'a pas d'antécédent par $z \mapsto i\frac{1+z}{1-z}$. Donc $k(i\mathbb{R}) \subset \mathbb{U} \setminus \{-i\}$.
Réciproquement, soit $w \in \mathbb{U} \setminus \{-i\}$. Étant donné $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{ll} & w = k(z) \\ \Leftrightarrow & w = i\frac{1+z}{1-z} \\ \Leftrightarrow & w = \frac{iz+z}{-z+1} \\ \Leftrightarrow & w(-z+1) = iz + i \\ \Leftrightarrow & (-w-i)z = -w + i \\ \Leftrightarrow & z = \frac{-w+i}{-w-i} \quad \textit{car } w \neq -i \textit{ donc } -w - i \neq 0 \end{array}$$

De plus, $w \in \mathbb{U} \setminus \{-i\}$ donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\theta \neq -\frac{\pi}{2} + k \times 2\pi$ et $w = e^{i\theta}$. Par conséquent,

$$\frac{-w+i}{-w-i} = \frac{-e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{2}}}{-e^{i\theta} - e^{i\frac{\pi}{2}}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{i\theta}}{e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{i\theta}} = \frac{e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})}(e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})} - e^{-i(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})})}{e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})}(e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})} + e^{-i(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})})} = i\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) \in i\mathbb{R}$$

Donc $w = k(i\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})) \in k(i\mathbb{R})$.
Cela démontre que $\mathbb{U} \setminus \{-i\} \subset k(i\mathbb{R})$.
On peut conclure que $k(i\mathbb{R}) = \mathbb{U} \setminus \{-i\}$.

2)c) Soit $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\theta \neq 0 + k \times 2\pi$ et $z = e^{i\theta}$. On a

$$k(z) = i\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = -i\frac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1} = -i\frac{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}})}{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}})} = -i\frac{2\cos(\frac{\theta}{2})}{2i\sin(\frac{\theta}{2})} = \frac{-\cos(\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})} \in \mathbb{R}$$

Cela démontre que $k(\mathbb{U} \setminus \{1\}) \subset \mathbb{R}$.
De plus, avec les mêmes notations,
- si $\cos(\frac{\theta}{2}) = 0$, c'est-à-dire si $\exists l \in \mathbb{Z} : \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2} + l\pi$, ce qui est équivalent à $\exists l \in \mathbb{Z} : \theta = \pi + l \times 2\pi$, alors $k(z) = 0$,
- sinon, si $\cos(\frac{\theta}{2}) \neq 0$ c'est-à-dire si $\forall l \in \mathbb{Z}, \theta \neq \pi + l \times 2\pi$, alors $k(z) = \frac{-1}{\tan(\frac{\theta}{2})}$.

Soit $y \in \mathbb{R}$.
- Si $y = 0$, on pose $z = 0$ et on a $k(z) = 0 = y$.
- Si $y \neq 0$, étant donné $\theta \in]-\pi, \pi[$, on a $\frac{\theta}{2} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et les équivalences suivantes :

$$y = \frac{-1}{\tan(\frac{\theta}{2})} \Leftrightarrow \tan(\frac{\theta}{2}) = \frac{-1}{y} \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} = \arctan(\frac{-1}{y}) \Leftrightarrow \theta = 2\arctan(\frac{-1}{y})$$

On pose donc $z = e^{i2\arctan(\frac{-1}{y})}$. On a $\arctan(\frac{-1}{y}) \neq 0$ et $\arctan(\frac{-1}{y}) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc $\cos(\arctan(\frac{-1}{y})) \neq 0$ et $k(z) = \frac{-1}{\tan(\arctan(\frac{-1}{y}))} = \frac{-1}{\frac{-1}{y}} = y$.
Cela démontre que $\mathbb{R} \subset k(\mathbb{U} \setminus \{1\})$.
On peut conclure que $k(\mathbb{U} \setminus \{1\}) = \mathbb{R}$.

3)a) Soit $z \in \mathbb{U}$. Alors $|z| = 1$ et par conséquent $|m(z)| = \frac{|e^{i\varphi}|}{|z|} = \frac{1}{1} = 1$ donc $m(z) \in \mathbb{U}$. Cela démontre que $m(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

3)b) Soit $z \in \mathbb{U}$. Alors $|z| = 1$. Si $\bar{\alpha}z + 1 = 0$ alors $\bar{\alpha}z = -1$ donc $|\bar{\alpha}||z| = 1$ donc $|\bar{\alpha}| = 1$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de l'énoncé. Donc $\bar{\alpha}z + 1 \neq 0$. Cela justifie que l'application n est bien définie sur $\mathbb{U}$.
Soit $z \in \mathbb{U}$. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$. Par conséquent,

$$|n(z)| = |e^{i\varphi}|\frac{|e^{i\theta} + \alpha|}{|\bar{\alpha}e^{i\theta} + 1|} = 1 \times \frac{|e^{i\theta}||1 + \alpha e^{-i\theta}|}{|\bar{\alpha}e^{i\theta} + 1|} = \frac{1 \times |\overline{1 + \alpha e^{-i\theta}}|}{|\bar{\alpha}e^{i\theta} + 1|} = \frac{|1 + \bar{\alpha}e^{i\theta}|}{|\bar{\alpha}e^{i\theta} + 1|} = 1$$

donc $n(z) \in \mathbb{U}$. On a démontré que $n(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

4)a) Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. On a $|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2}) = (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} = |z_1|^2 + \overline{z_1}z_2 + \overline{\overline{z_1}z_2} + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\mathcal{R}e(\overline{z_1}z_2) + |z_2|^2$.

4)b) On suppose que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $z_1 + 2\mathcal{R}e(e^{-i\theta}z_2) = 0$ c'est-à-dire que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $z_1 = -2\mathcal{R}e(e^{-i\theta}z_2)$.
En particulier pour $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, -\frac{\pi}{2}$, on a

$$\begin{cases} z_1 = -2\mathcal{R}e(z_2) \\ z_1 = -2\mathcal{R}e(-iz_2) \\ z_1 = -2\mathcal{R}e(-z_2) \\ z_1 = -2\mathcal{R}e(iz_2) \end{cases}$$

Soient $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $z_1 = u_1 + iv_1$ et $z_2 = u_2 + iv_2$. Alors

$$\begin{cases} u_1 + iv_1 = -2u_2 \\ u_1 + iv_1 = -2v_2 \\ u_1 + iv_1 = 2u_2 \\ u_1 + iv_1 = 2v_2 \end{cases}$$

En faisant les opérations sur les lignes $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_2$, on obtient $u_2 = 0$ et $v_2 = 0$, c'est-à-dire $z_2 = 0$. Puis alors $u_1 + iv_1 = 0$ c'est-à-dire $z_1 = 0$.
On a démontré que si $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $z_1 + 2\mathcal{R}e(e^{-i\theta}z_2) = 0$ alors $z_1 = 0$ et $z_2 = 0$.

5)a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
On a $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$
donc par hypothèse, $h(e^{i\theta}) \in \mathbb{U}$
donc $|h(e^{i\theta})| = 1$
donc $|ae^{i\theta} + b| = |ce^{i\theta} + d|$
donc $|ae^{i\theta} + b|^2 = |ce^{i\theta} + d|^2$
donc d'après 4)a), $|ae^{i\theta}|^2 + |b|^2 + 2\mathcal{R}e(\overline{ae^{i\theta}}b) = |ce^{i\theta}|^2 + |d|^2 + 2\mathcal{R}e(\overline{ce^{i\theta}}d)$
donc $|a|^2 + |b|^2 + 2\mathcal{R}e(\overline{a}be^{-i\theta}) = |c|^2 + |d|^2 + 2\mathcal{R}e(\overline{c}de^{-i\theta})$.

5)b) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, d'après 6)a) on a $(|a|^2 + |b|^2 - |c|^2 - |d|^2) + 2\mathcal{R}e((\bar{a}b - \bar{c}d)e^{-i\theta}) = 0$.
Donc d'après 4)b), on $|a|^2 + |b|^2 - |c|^2 - |d|^2 = 0$ et $\bar{a}b - \bar{c}d$, c'est-à-dire $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2$ et $\bar{a}b = \bar{c}d$.

5)c) Par hypothèse, $a = 0$.
D'après 5)b), $\bar{a}b = \bar{c}d$. Donc $\bar{c}d = 0$ donc $c = 0$ ou $d = 0$. Si $c = 0$ alors $ad - bc = 0 \times d - b \times 0 = 0$. Or par hypothèse, $ad - bc \neq 0$. C'est une contradiction. Donc $c \neq 0$ et par conséquent $d = 0$.
De plus, d'après 5)b), $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2$. Comme $a = 0$ et $d = 0$ alors $|b|^2 = |c|^2$ et comme $|b| \geq 0$ et $|c| \geq 0$, alors $|b| = |c|$.
Soient $\varphi_b, \varphi_c \in \mathbb{R}$ tels que $b = |b|e^{i\varphi_b}$ et $c = |c|e^{i\varphi_c}$. Alors, $\forall z \in D$, on a $h(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{0\times z + |b|e^{i\varphi_b}}{|c|e^{i\varphi_c}z + 0} = \frac{|b|e^{i\varphi_b}}{|b|e^{i\varphi_c}z} = \frac{e^{i(\varphi_b - \varphi_c)}}{z}$.
On a démontré qu'il existe $\varphi = \varphi_b - \varphi_c \in \mathbb{R}$ tel que $h = z \mapsto \frac{e^{i\varphi}}{z}$.

5)d) Par hypothèse $a \neq 0$.
Comme $a \neq 0$ alors $|a| \neq 0$. D'après 5)b), $\bar{a}b = \bar{c}d$ donc $|a||b| = |c||d|$ donc $|b| = \frac{|c||d|}{|a|}$. De plus, $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2$ donc $|a|^2 + \frac{|c|^2|d|^2}{|a|^2} = |c|^2 + |d|^2$ donc $(|a|^2)^2 + |c|^2|d|^2 = |a|^2|c|^2 + |a|^2|d|^2$ donc $|a|^2(|a|^2 - |c|^2) + |d|^2(|c|^2 - |a|^2) = 0$ donc $(|a|^2 - |c|^2)(|a|^2 - |d|^2) = 0$. Par conséquent, $|a|^2 = |c|^2$ ou $|a|^2 = |d|^2$, et comme les modules sont positifs, $|a| = |c|$ ou $|a| = |d|$.
Si $|a| = |c|$ alors d'après 5)b), $\bar{a}b = \bar{c}d$ donc comme $a \neq 0$, $|a|^2 \neq 0$ donc $\frac{b}{a} = \frac{\bar{a}b}{|a|^2} = \frac{\bar{c}d}{|c|^2} = \frac{d}{c}$ et donc $ad - bc = 0$.
C'est en contradiction avec l'hypothèse $ad - bc \neq 0$. Donc $|a| \neq |c|$.
On en déduit que $|a| = |d|$. De plus, comme $\bar{a}b = \bar{c}d$, alors $|a||b| = |c||d|$, et comme $|d| = |a| \neq 0$, en divisant par $|a|$, on obtient $|b| = |c|$. Et $a \neq 0$ donc $d \neq 0$.
Soient $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c, \varphi_d \in \mathbb{R}$ tels que $a = |a|e^{i\varphi_a}$, $b = |b|e^{i\varphi_b}$, $c = |c|e^{i\varphi_c} = |b|e^{i\varphi_c}$ et $d = |d|e^{i\varphi_d} = |a|e^{i\varphi_d}$. Pour tout $z \in D$, $h(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{d}\frac{z+\frac{b}{a}}{\frac{c}{d}z+1} = e^{i(\varphi_a - \varphi_d)}\frac{z+\frac{b}{a}}{\frac{c}{d}z+1}$.
On pose $\alpha = \frac{b}{a}$. On a $|a| \neq |c| = |b|$ donc $|\alpha| \neq 1$. Et comme $\bar{a}b = \bar{c}d$ alors $a\bar{b} = c\bar{d}$ et par conséquent, $\bar{\alpha} = \frac{\bar{b}}{\bar{a}} = \frac{a\bar{b}}{|a|^2} = \frac{c\bar{d}}{|d|^2} = \frac{c}{d}$.
En posant $\varphi = \varphi_a - \varphi_d$ et $\alpha = \frac{b}{a}$, on a bien $|\alpha| \neq 1$ et $h = z \mapsto e^{i\varphi}\frac{z+\alpha}{\bar{\alpha}z+1}$.