Devoir à la maison n° 14

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit E un espace vectoriel de dimension n, et soit $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.
Soit $x \in E$, on note $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ les coordonnées de x dans β.
On considère la famille $\mathcal{F} = (e_1 + x, e_2 + x, \dots, e_n + x)$.

1. Écrire la matrice M de la famille $\mathcal{F}$ dans β.
2. Calculer le déterminant de M.
3. À quelle condition sur x la famille $\mathcal{F}$ est-elle une base de E ?

Exercice 2. Le but de cet exercice est de montrer par l'absurde que π est un nombre irrationnel.
Supposons qu'il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\pi = \dfrac{p}{q}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P_n = \frac{1}{n!} X^n (p - qX)^n \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^\pi P_n(t) \sin(t) dt.$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n \geq 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N},\ P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.
   (b) Montrer que : $P_n(\pi - X) = P_n(X)$.
   (c) En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N},\ P_n^{(k)}(\pi) \in \mathbb{Z}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $a_k = P_n^{(k)}(0) + P_n^{(k)}(\pi)$.
   Par intégrations par parties, déterminer I_n en fonction des a_k.
   (b) En déduire que : $I_n \in \mathbb{N}$.
4. (a) Justifier que la fonction $t \mapsto t(p - qt)$ est bornée par un réel positif M sur $[0, \pi]$.
   (b) En déduire que : $I_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
5. Montrer que l'hypothèse initiale est absurde.