Feuille d'exercices 23
VARIABLES ALÉATOIRES

1 - VARIABLES ALÉATOIRES

Exercice 1. Un joueur lance n fois une pièce équilibrée. Soit X la variable aléatoire donnant le numéro du lancer lors duquel le résultat est pile pour la première fois; si pile n'est jamais obtenu, X prend la valeur 0. Déterminer la loi de X.

Exercice 2. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule de l'urne, on la remet puis on en tire une seconde. On note X la variable aléatoire égale au plus petit numéro obtenu. Déterminer la fonction de répartition de X, et en déduire la loi de X.

Exercice 3. Un examen est passé par n candidats. Chaque candidat réussit l'examen avec une probabilité p. En cas d'échec, le candidat passe un examen de rattrapage, qu'il réussit avec la même probabilité p. Déterminer la loi du nombre de candidats ayant réussi à l'issue des deux épreuves.

2 - ESPÉRANCE, VARIANCE, ÉCART-TYPE

Exercice 4. Un joueur joue à pile ou face avec une pièce truquée, qui donne pile avec une probabilité p. En misant 20 euros, il peut lancer 12 fois la pièce, et gagne 3 euros à chaque fois qu'il obtient pile. À quelle condition a-t-il intérêt à jouer ?

Exercice 5. Une urne contient 1 jeton marqué 1, 2 jetons marqués 2, et ainsi de suite jusqu'à n jetons marqués n. On tire un jeton, et on note X la variable aléatoire égale au numéro obtenu. Déterminer l'espérance et la variance de X. Quelle est la probabilité de l'événement « $|X - E(X)| \leq \sigma(X)$ » pour $n = 25$?

Exercice 6. Une puce se déplace sur une droite d'origine 0. À chaque instant, elle fait un bond d'une unité vers la droite avec une probabilité p, ou vers la gauche avec une probabilité $1 - p$. À l'instant 0, la puce est à l'origine. On note X_n sa position à l'instant n. Déterminer la loi et l'espérance de X_n.

Exercice 7. Une action voit sa valeur multipliée chaque jour par $\alpha > 1$ avec une probabilité p, par $\beta < 1$ avec une probabilité $1 - p$. Au jour 0, l'action vaut 1. On note X_n sa valeur au jour n. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X_n. Si $\beta = \dfrac{1}{\alpha}$, à quelle condition a-t-on intérêt à investir ?

Exercice 8. Un placard contient n paires de chaussures. On tire au hasard $2r$ chaussures (avec $0 \leq r \leq n$). Soit X la variable aléatoire égale aux nombres de paires complètes obtenues.

(a) On numérote les paires de 1 à n, et on appelle X_i la variable aléatoire indicatrice de l'événement « la paire i se trouve parmi les chaussures tirées ». Déterminer la loi et l'espérance de X_i.

(b) En déduire l'espérance de X.

3 - Couples de variables aléatoires

Exercice 9. On jette n dés, et on note X et Y les nombres de 1 et de 6 obtenus respectivement.

(a) Déterminer les lois suivies par X et Y, leurs espérances et leurs variances.

(b) Déterminer, pour tout $j \in Y(\Omega)$, la loi de X sachant $Y = j$.

(c) En déduire la loi conjointe du couple (X, Y). Les lois de X et Y sont-elles indépendantes ?

(d) Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Exercice 10. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On note $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$. Déterminer la loi et l'espérance de U et V.

Exercice 11. On pioche deux boules successivement et sans remise dans une urne contenant a boules noires et b boules blanches. On note X_1 la variable indicatrice de l'événement « la première boule est noire » et X_2 la variable indicatrice de l'événement « la seconde boule est noire ».

(a) Déterminer la loi conjointe du couple (X_1, X_2), ainsi que ses lois marginales.

(b) Montrer que X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

(c) Déterminer $E(X_1X_2)$ et $E(X_1)E(X_2)$.

(d) Soit $X = X_1 + X_2$. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Exercice 12. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois $\mathcal{B}(m, p)$ et $\mathcal{B}(n, p)$ respectivement. Montrer que $X + Y$ suit la loi $\mathcal{B}(m + n, p)$.

Exercice 13. On tire une carte d'un jeu de 32 cartes. On note X la variable aléatoire indicatrice de l'événement « on tire un roi », Y la variable aléatoire indicatrice de l'événement « on tire une dame », et Z la variable aléatoire indicatrice de l'événement « on tire un cœur ».

(a) Déterminer les lois conjointes et marginales des couples (X, Y) et (X, Z).

(b) Ces variables sont-elles indépendantes ?

Exercice 14. Une machine A fabrique 100 pièces, dont 5% sont défectueuses. Une machine B, indépendante de A, fabrique 400 pièces, dont 10% sont défectueuses. On appelle X et Y les variables aléatoires donnant le nombre de pièces défectueuses fabriquées par A et B respectivement.

(a) Déterminer les lois de X et Y.

(b) Soit $Z = X + Y$. Déterminer l'espérance et la variance de Z.

(c) À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer c tel que le risque que le nombre de pièces défectueuses soit supérieur à c est inférieur à 5%.

Exercice 15. Un joueur mise k euros sur un numéro entre 1 et 6. On lance ensuite 3 dés : si le numéro parié n'apparaît pas, le joueur perd sa mise ; dans le cas contraire il la récupère, augmentée de son multiple par le nombre d'occurrences de son numéro. Ce jeu est-il équitable ?

Exercice 16. Lors d'élections, on sait qu'un parti politique recueille en général un pourcentage p des voix compris entre 20 et 30. Combien de personnes suffit-il d'interroger à la sortie du bureau de vote pour estimer p avec une précision de 3%, et une probabilité d'erreur inférieure à 10% ?