Feuille d'exercices 24
SÉRIES NUMÉRIQUES

1 - ÉTUDE DES SÉRIES NUMÉRIQUES

Exercice 1. Montrer la convergence et calculer la somme des séries suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2-1}$, (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right)$, (c) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\binom{n}{2}}$.

Exercice 2. En simplifiant l'expression $\dfrac{1}{\tan x}-\dfrac{2}{\tan 2x}$, montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{2^n}\tan\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$ converge, et déterminer sa somme.

Exercice 3. Soit $x\in\mathbb{R}$. En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que la série de terme général $\dfrac{x^n}{n!}$ converge, et déterminer sa somme.

Exercice 4. Soit (u_n) une suite décroissante vers 0. On considère la suite (S_n) des sommes partielles de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(-1)^n u_n$.

(a) Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

(b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(-1)^n u_n$ est convergente.

(c) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ |R_n|\leq u_{n+1}$.

2 - SÉRIES À TERMES POSITIFS

Exercice 5. Déterminer la nature (convergente ou divergente) des séries suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{2+(-1)^n}{3^n}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$,

(c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\ln\frac{n^3+5n+7}{n^3+5n}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt[4]{n}}$,

(e) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\sin\frac{1}{n}-\tan\frac{1}{n}$,

(f) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{n}{(n+1)!}$,

(g) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{e}{n}\right)^n$,

(h) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}$,

(i) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2-\ln n}$,

(j) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{\mathrm{ch}(n)}{\mathrm{ch}(2n)}$,

(k) $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{\sqrt{n+1}}{n^2(\ln n)^3}$,

(l) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{a^n}{1+a^{2n}}$,

(m) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(\ln n)^n}{n^{\ln n}}$,

(n) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{e}}$,

(o) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\sqrt[3]{n^3+an}-\sqrt{n^2+3}$.

Exercice 6. Étudier, selon la valeur de $p\in\mathbb{N}$, la série de terme général $u_n=\dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+p)!}$.

Exercice 7. Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs. Étudier les séries de termes généraux :

(a) u_n^2, (b) $\dfrac{\sqrt{u_n}}{n}$, (c) $\sqrt{u_n u_{2n}}$, (d) $\dfrac{u_n}{1-u_n}$, (e) $\dfrac{u_n}{1+u_n}$.

Exercice 8. Soit $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ strictement croissante. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\varphi(n)}{n^2}$ diverge.

Exercice 9. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels strictement positifs. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{a_n}{(1+a_0)\cdots(1+a_n)}.$$

(a) Montrer que la série de terme général u_n converge.

(b) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 1 \;\Leftrightarrow\; \sum_{n\geq 0} a_n$ diverge.

Exercice 10. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

(a) Montrer que la suite (u_n) converge, et déterminer sa limite.

(b) On note S_n la somme partielle de $\sum u_n$. Simplifier e^{-S_n}, et en déduire la nature de cette série.

Exercice 11. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et : $\forall n \geq 2,\ u_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.

(a) Déterminer la nature de $\sum u_n$ lorsque $\alpha \neq 1$.

(b) On suppose $\alpha = 1$. En encadrant les sommes partielles de $\sum u_n$ par des intégrales, déterminer la nature de cette série.

3 - Séries à termes de signes quelconques

Exercice 12. Soit $x \in \mathbb{R}$. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $\arctan$, montrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ converge, et déterminer sa somme. Qu'obtient-on pour $x = 1$?

Exercice 13. Déterminer la nature des séries suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \cos n \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$,

(b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n^2}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{n}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} - \frac{1}{e}$,

(e) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$,

(f) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$,

(g) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$,

(h) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \sin\left(\pi \frac{n^3+1}{n^2+1}\right)$,

(i) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(1+n)\sin n}{n^2\sqrt{n}}$.