Devoir à la maison n° 14
CORRIGÉ

Exercice 1.

1. Soit $i \in [\![1, n]\!]$, on a : $M_\beta(e_i + x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ 1 + x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \leftarrow$ ligne i˙

   Donc :
$$M = M_\beta(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 1+x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & 1+x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & 1+x_n \end{pmatrix}.$$

2. D'après la méthode du pivot :
$$\begin{aligned} \det(M) &\underset{\forall i \in [\![2,n]\!],\ L_i \leftarrow L_i - L_1}{=} \begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\ &\underset{C_1 \leftarrow C_2 + \cdots + C_n}{=} \begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^n x_i & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 + \sum_{i=1}^n x_i. \end{aligned}$$

3. La famille $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $\det(M) \neq 0$, c'est-à-dire, d'après le résultat précédent, si et seulement si $\sum_{i=1}^n x_i \neq -1$.

Exercice 2.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $t \in [0, \pi]$, alors $0 \leq t \leq \dfrac{p}{q}$, donc $t \geq 0$ et $p - qt \geq 0$, donc $P_n(t) \geq 0$; et $\sin(t) \geq 0$, donc $P_n(t)\sin(t) \geq 0$. Donc, par positivité de l'intégrale, $I_n \geq 0$.

2. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Notons $S_n = \dfrac{X^n}{n!}$ et $T_n = (p - qX)^n$. Alors, d'après la formule de Leibniz :

$$P_n^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} S_n^{(j)} T_n^{(k-j)},$$

où : $\forall j \in \mathbb{N},\ S_n^{(j)} = \begin{cases} \frac{X^{n-j}}{(n-j)!} & \text{si } j \leq n \\ 0_{\mathbb{R}[X]} & \text{si } j > n \end{cases}$, donc $S_n^{(j)}(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = n \\ 0 & \text{si } j \neq n \end{cases}$.

Donc $P_n^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < n \\ T_n^{(k-n)}(0) & \text{si } k \geq n \end{cases}$.

Or : $\forall j \in \mathbb{N},\ T_n^{(j)} = \begin{cases} \frac{n!}{(n-j)!}(-q)^j (p - qX)^{n-j} & \text{si } j \leq n \\ 0_{\mathbb{R}[X]} & \text{si } j > n \end{cases}$,

donc $T_n^{(k-n)}(0) = \begin{cases} \frac{n!}{(2n-k)!}(-q)^{k-n} p^{2n-k} \in \mathbb{Z} & \text{si } k \leq 2n \\ 0 & \text{si } k > 2n \end{cases}$.

Donc, dans tous les cas, $P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.

(b) On a directement :

$$P_n(\pi - X) = P_n\left(\frac{p}{q} - X\right) = \frac{1}{n!}\left(\frac{p}{q} - X\right)^n \left(p - q\left(\frac{p}{q} - X\right)\right)^n = \frac{1}{n!}\frac{1}{q^n}(p - qX)^n (qX)^n = P_n(X).$$

(c) Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après le résultat ci-dessus : $P_n^{(k)}(X) = (-1)^k P_n^{(k)}(\pi - X)$, donc, d'après la question 2.(a) : $P_n^{(k)}(\pi) = (-1)^k P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.

3. (a) Par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^\pi P_n(t)\sin(t)dt \\ &= [-P_n(t)\cos(t)]_0^\pi + \int_0^\pi P_n'(t)\cos(t)dt \\ &= a_0 + \int_0^\pi P_n'(t)\cos(t)dt \\ &= a_0 + [P_n'(t)\sin(t)]_0^\pi - \int_0^\pi P_n''(t)\sin(t)dt \\ &= a_0 - \int_0^\pi P_n''(t)\sin(t)dt, \end{aligned}$$

puis, par récurrence, et comme $P_n^{(2n+1)} = 0_{\mathbb{R}[X]}$, :

$$\begin{aligned} I_n &= a_0 - a_2 + \int_0^\pi P_n^{(4)}(t)\sin(t)dt \\ &= \cdots \\ &= a_0 - a_2 + \cdots + (-1)^n a_{2n}. \end{aligned}$$

(b) D'après la question 2 : $\forall k \in \mathbb{N},\ a_k \in \mathbb{Z}$, donc $I_n \in \mathbb{Z}$; et de plus, d'après la question 1, $I_n \geq 0$, donc $I_n \in \mathbb{N}$.

4. (a) La fonction $t \mapsto t(p - qt)$ est continue sur $[0, \pi]$ donc, d'après le théorème de Weierstrass, elle est bornée par un certain $M \in \mathbb{R}_+$ sur ce segment.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente : $\forall t \in [0, \pi]$, $|P_n(t)\sin(t)| \leq \dfrac{M^n}{n!}$.
   Par inégalité triangulaire et croissance de l'intégrale, on a donc :

$$|I_n| \leq \int_0^\pi |P_n(t)\sin(t)|dt \leq \int_0^\pi \frac{M^n}{n!} = \pi \frac{M^n}{n!}.$$

   Or, par croissances comparées, $\dfrac{M^n}{n!} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc, par encadrement, $I_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

5. On a montré que la suite (I_n) est une suite d'entiers convergente vers 0. Elle est donc stationnaire à 0, c'est-à-dire qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que la suite (I_n) est constante égale à 0 à partir du rang N.
   En particulier, $I_N = \displaystyle\int_0^\pi P_N(t)\sin(t)dt = 0$. Comme on l'a vu, la fonction $t \mapsto P_N(t)\sin(t)$ est positive sur $[0, \pi]$, et est usuellement continue, donc, comme son intégrale est nulle, par positivité de l'intégrale, cette fonction est nulle sur $[0, \pi]$.
   Or : $\forall t \in]0, \pi[$, $\sin(t) > 0$, donc : $\forall t \in]0, \pi[$, $P_N(t) = 0$. Le polynôme P_N, qui est de degré $2N$, a donc une infinité de racines réelles, ce qui, d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, est absurde.
   Donc π est irrationnel.