Corrigé du Devoir à la Maison n°15

Partie A. Lois de X, Y, Z.

1. La boule d'argent peut arriver aux tirages 1 à n, donc $X(\Omega) = \{1, \ldots, n\}$.
   Comme $n-2$ boules ne sont pas de bronze, la première boule de bronze arrive au plus tard au tirage $n-1$, c'est le cas où toutes les $n-2$ premières boules ne sont pas de bronze. Elle peut arriver à tous les tirages précédents à partir du premier. Donc $Y(\Omega) = \{1, \ldots, n-1\}$.
   Comme $n-c$ boules ne sont pas de cuivre, le première boule de cuivre arrive au plus tard au tirage $n-c+1$. Elle peut arriver à tous les tirages précédents. Donc $Z(\Omega) = \{1, \ldots, n-c+1\}$.
   Ces valeurs sont cohérentes dans les cas où $c = 1$ et $c = 2$, car on est alors ramené aux cas des boules d'argent et de bronze.
2. (a) L'événement $(X \geqslant k)$ a lieu si les $k-1$ premières boules piochées ne sont pas d'argent.
   On modélise l'expérience par l'univers Ω contenant les sous-ensembles de $k-1$ boules prélevées parmi les n boules de l'urne.
   Alors l'événement $(X \geqslant k)$ contient les parties à $k-1$ éléments de l'ensemble des $n-1$ boules qui ne sont pas d'argent.
   Par définition des coefficients du binôme :
   $$\operatorname{Card}\Omega = \binom{n}{k-1} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Card}(X \geqslant k) = \binom{n-1}{k-1}.$$
   De plus Ω est muni de la probabilité uniforme car les boules sont indiscernables, donc par équiprobabilité :
   $$P(X \geqslant k) = \frac{\operatorname{Card}(X \geqslant k)}{\operatorname{Card}\Omega} = \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k-1}}.$$
   On calcule :
   $$P(X \geqslant k) = \frac{(n-1)!(k-1)!(n-k+1)!}{(k-1)!(n-k)!n!} = \frac{n-k+1}{n}.$$
   Si l'événement $(X \geqslant k)$ a lieu alors $k-1$ boules ont été prélevées, aucune n'est d'argent. Il reste donc dans l'urne $n-k+1$ boules dont une est d'argent. La probabilité qu'elle soit piochée est donc :
   $$P_{X \geqslant k}(X = k) = \frac{1}{n-k+1}.$$
   Si l'événement $(X = k)$ a lieu alors les $k-1$ premières boules ne sont pas d'argent, donc $(X = k) \subseteq (X \geqslant k)$, puis $(X \geqslant k) \cap (X = k) = (X = k)$.
   On en déduit :
   $$P(X = k) = P((X \geqslant k) \cap (X = k)) = P(X \geqslant k) P_{X \geqslant k}(X = k) = \frac{1}{n}.$$

(b) On a démontré que :

$$X(\Omega) = \{1, \dots, n\} \qquad \text{et} \qquad \forall k \in X(\Omega) \quad P(X = k) = \frac{1}{n}.$$

Par définition X suit une loi uniforme de paramètre n : $\quad X \hookrightarrow \mathcal{U}(n)$

En conséquence son espérance et sa variance sont :

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

3. (a) Pour l'événement $(Y \geqslant k)$ on choisit le même univers mais l'événement $(Y \geqslant k)$ est l'ensemble des parties à $k-1$ éléments de l'ensemble des $n-2$ boules qui ne sont pas de bronze, donc par équiprobabilité :

$$\begin{aligned} P(Y \geqslant k) &= \frac{\mathrm{Card}(Y \geqslant k)}{\mathrm{Card}\,\Omega} = \frac{\binom{n-2}{k-1}}{\binom{n}{k-1}} \\ &= \frac{(n-2)!(k-1)!(n-k-1)!}{(k-1)!(n-k+1)!n!} = \frac{(n-k+1)(n-k)}{n(n-1)}. \end{aligned}$$

Si l'événement $(Y \geqslant k)$ a lieu alors il reste $n-k+1$ boules dans l'urne dont deux de bronze, la probabilité d'en piocher une est donc :

$$P_{Y \geqslant k}(Y = k) = \frac{2}{n-k+1}.$$

(b) Comme précédemment :

$$(Y = k) \subseteq (Y \geqslant k) \qquad \text{donc} \qquad (Y = k) = (Y \geqslant k) \cap (Y = k).$$

On calcule :

$$P(Y = k) = P((Y \geqslant k) \cap (Y = k)) = P(Y \geqslant k) P_{Y \geqslant k}(Y = k) = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}.$$

Cette formule est vraie pour tout $k = 1, \dots, n-1$, mais on peut remarquer qu'elle l'est aussi pour $k = n$. En effet l'événement $(Y = n)$ est impossible comme il a été justifié dans la première question, et on obtient bien $P(Y = n) = 0$.
Finalement la loi de Y est donnée par :

$$Y(\Omega) = \{1, \dots, n-1\} \qquad \text{et} \qquad \forall k = 1, \dots, n \quad P(Y = k) = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}.$$

(c) On calcule l'espérance de Y :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=1}^{n-1} k P(Y = k) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} (nk - k^2) = \frac{2}{n(n-1)} \left(n \sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \right) \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \left(\frac{n^2(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \right) = \frac{n+1}{3} \end{aligned}$$

Pour le calcul de la variance on commence par l'espérance de Y^2, grâce au théorème de transfert :

$$E(Y^2) = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 P(Y=k) = \frac{2}{n(n-1)}\left(n\sum_{k=1}^{n-1} k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} k^3\right)$$
$$= \frac{2}{n(n-1)}\left(\frac{n^2(n-1)(2n-1)}{6} - \frac{n^2(n-1)^2}{4}\right) = \frac{n(n+1)}{6}$$

Ensuite grâce à la formule de König-Huyghens :

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{n(n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{9} = \frac{(n+1)(n-2)}{18}$$

Finalement l'espérance et la variance de Y sont :

$$E(Y) = \frac{n+1}{3} \qquad \text{et} \qquad V(Y) = \frac{(n+1)(n-2)}{18}.$$

On remarque que l'espérance de Y est nulle si $n=2$. En effet dans ce cas il n'y a que deux boules de bronze dans le sac, donc la première arrive au premier tirage (d'ailleurs si $n=2$ alors $E(Y)=1$). La variable aléatoire Y est constante, donc sa variance est nulle.

4. (a) De même que précédemment on obtient, pour tout $k \in Z(\Omega) = \{1, \ldots, n-c+1\}$:

$$P(Z \geqslant k) = \frac{\binom{n-c}{k-1}}{\binom{n}{k-1}} \qquad\qquad P_{Z\geqslant k}(Z=k) = \frac{c}{n-k+1}$$

$$P(Z=k) = \frac{c(n-c)!(n-k)!}{(n-c-k+1)!n!}.$$

(b) Si $c=1$:

$$Z(\Omega) = \{1, \ldots, n\} \qquad \text{et} \qquad \forall k \in Z(\Omega) \qquad P(Z=k) = \frac{1}{n}.$$

Il s'agit bien de la même loi que X.
Si $c=2$:

$$Z(\Omega) = \{1, \ldots, n-1\} \qquad \text{et} \qquad \forall k \in Z(\Omega) \qquad P(Z=k) = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}.$$

Il s'agit bien de la même loi que Y.
Effectivement, si $c=1$ alors la boule de cuivre a la même probabilité d'apparition que la boule d'argent, et si $c=2$ alors les boules de cuivre ont la même probablité d'apparition que les boules de bronze.

Partie B. Premier calcul de l'espérance de Z.

1. En multipliant par $(c-1)!$ le dénominateur et le numérateur de $P(Z=k)$:

$$P(Z=k)=\frac{c!(n-c)!(n-k)!}{(n-c-k+1)!n!(c-1)!}=\frac{c!(n-c)!}{n!}\frac{(n-k)!}{(n-c-k+1)!(c-1)!}=\frac{\binom{n-k}{c-1}}{\binom{n}{c}}$$

Pour expliquer cette formule on modélise différemment l'expérience.
Comme on pioche toutes les boules de l'urne, on peut choisir pour univers Ω l'ensemble de toutes les places qu'occupent les boules de cuivre. Cet univers est l'ensemble des toutes les parties à c éléments de l'ensemble des n places possibles. Il est donc de cardinal $\binom{n}{c}$.
L'événement $(Z=k)$ signifie que la place k a été choisie pour l'une des boules de cuivre, et que les $c-1$ autres boules ont des places choisies parmi l'ensemble des $n-k$ places strictement supérieures à k.
L'événement $(Z=k)$ est donc de cardinal $1\times\binom{n-k}{c-1}$.
Par équiprobabilité sur Ω on en déduit $P(Z=k)=\frac{\binom{n-k}{c-1}}{\binom{n}{c}}$.

2. Par propriété d'une loi de probabilité :

$$\sum_{k\in Z(\Omega)}P(Z=k)=1.$$

La formule ci-dessus pour $P(Z=k)$ donne donc :

$$\sum_{k=1}^{n-c+1}\binom{n-k}{c-1}=\binom{n}{c}. \tag{1}$$

3. La formule ci-dessus est valable pour tout couple d'entiers (c,n) tel que $1\leqslant c\leqslant n$.
En posant $p=c-1$ et $q=n-1$ on en déduit que pour tout couple d'entiers p et q tels que $0\leqslant p\leqslant q$:

$$\sum_{k=1}^{q-p+1}\binom{q+1-k}{p}=\binom{q+1}{p+1}.$$

Le changement d'indice $j=q+1-k$ donne alors :

$$\sum_{j=p}^{q}\binom{j}{p}=\binom{q+1}{p+1}. \tag{2}$$

Soit m un entier tel que $q\leqslant m$. Le changement d'indice $k=m-j$ donne :

$$\sum_{k=m-q}^{m-p}\binom{m-k}{p}=\binom{q+1}{p+1}. \tag{3}$$

Les formules sont démontrées.

4. Par définition :

$$E(Z) = \sum_{k=1}^{n-c+1} kP(Z=k) = \sum_{k=1}^{n-c+1} k\frac{\binom{n-k}{c-1}}{\binom{n}{c}} = \frac{1}{\binom{n}{c}}\sum_{k=1}^{n-c+1} k\binom{n-k}{c-1}.$$

On écrit $k = \sum_{i=1}^{k} 1$ puis on utilise les propriétés des sommes triangulaires :

$$E(Z) = \frac{1}{\binom{n}{c}}\sum_{k=1}^{n-c+1}\sum_{i=1}^{k}\binom{n-k}{c-1} = \frac{1}{\binom{n}{c}}\sum_{i=1}^{n-c+1}\sum_{k=i}^{n-c+1}\binom{n-k}{c-1}.$$

On applique la formule (3) avec $p = c-1$, $m = n$ et $q = n-i$.
Comme $i \leqslant n-c+1$ alors on a bien $0 \leqslant p \leqslant q \leqslant m$, donc :

$$E(Z) = \frac{1}{\binom{n}{c}}\sum_{i=1}^{n-c+1}\binom{n-i+1}{c}.$$

On applique la formule (3) avec $p = c$, $m = n+1$ et $q = n$.
On a bien $0 \leqslant p \leqslant q \leqslant m$, donc :

$$E(Z) = \frac{1}{\binom{n}{c}}\binom{n+1}{c+1}.$$

Il reste à simplifier :

$$E(Z) = \frac{c!(n-c)!}{n!}\frac{(n+1)!}{(c+1)!(n-c)!} = \frac{n+1}{c+1}.$$

On a démontré que $E(Z) = \dfrac{n+1}{c+1}$.
Dans les cas où $c = 1$ et $c = 2$ on retrouve bien les espérances de X et de Y.

Partie C. Second calcul de l'espérance de Z.

1. On sait que $Z_n(\Omega) = \{1, \dots, n-c+1\}$.
   L'événement $(Z_n = 1)$ est l'événement où la première boule piochée est de cuivre, par équiprobabilité sa probabilité est :
   $$P(Z=1) = \frac{c}{n}.$$
2. Si $n = c$ alors toutes les boules sont de cuivre, donc Z_c est la variable aléatoire certaine de valeur 1. Son espérance est :
   $$E(Z_c) = 1.$$
3. (a) L'événement $\overline{C}$ a lieu si et seulement si la première boule piochée n'est pas de cuivre. On peut alors supposer que l'on recommence l'expérience avec une boule de moins. Il reste $n-1$ boules dans l'urne, dont c boules de cuivre.
   Donc dans le cas où la première boule piochée n'est pas de cuivre la probabilité que la première boule de cuivre arrive au tirage k est la probabilité qu'avec juste $n-1$ boules la première boule de cuivre arrive au tirage $k-1$.
   Ceci justifie que :
   $$P_{\overline{C}}(Z_n = k) = P(Z_{n-1} = k-1).$$

(b) La famille $(C, \overline{C})$ est un système complet d'événements.
D'après la formule des probabilités totales :

$$P(Z_n = k) = P(C)P_C(Z_n = k) + P(\overline{C})P_{\overline{C}}(Z_n = k)$$

Si l'événement C a lieu alors la première boule de cuivre arrive au premier tirage. On a supposé que $k > 1$ donc l'événement $Z_n = k$ n'a pas lieu. Ainsi $P_C(Z_n = k) = 0$.
Comme l'urne contient n boules dont c de cuivre alors $P(C) = \frac{c}{n}$ et $P(\overline{C}) = 1 - \frac{c}{n}$.
On en déduit :

$$P(Z_n = k) = \left(1 - \frac{c}{n}\right)P(Z_{n-1} = k - 1).$$

4. Par définition de l'espérance, et comme $Z_n(\Omega) = \{1, \ldots, n - c + 1\}$:

$$E(Z_n) = \sum_{k=1}^{n-c+1} kP(Z_n = k).$$

La formule de la question précédente est valable pour $k > 1$, et $P(Z_n = 1) = \frac{c}{n}$, donc :

$$E(Z_n) = \frac{c}{n} + \sum_{k=2}^{n-c+1} k\left(1 - \frac{c}{n}\right)P(Z_{n-1} = k - 1).$$

Le changement d'indice $i = k - 1$ donne :

$$\begin{aligned} E(Z_n) &= \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{c}{n}\right)\sum_{i=1}^{n-c}(i + 1)P(Z_{n-1} = i) \\ &= \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{c}{n}\right)\left(\sum_{i=1}^{n-c} iP(Z_{n-1} = i) + \sum_{i=1}^{n-c} P(Z_{n-1} = i)\right). \end{aligned}$$

Comme $Z_{n-1}(\Omega) = \{1, n - c\}$ alors :

$$E(Z_n) = \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{c}{n}\right)(E(Z_{n-1}) + 1) = 1 + \left(1 - \frac{c}{n}\right)E(Z_{n-1}).$$

On a bien obtenu la formule demandée.

5. On sait que $E(Z_c) = 1$. La formule précédente permet de calculer :

$$E(Z_{c+1}) = \frac{c+2}{c+1} \qquad \text{et} \qquad E(Z_{c+2}) = \frac{c+3}{c+1}$$

On démontre par récurrence que pour tout $n \geqslant c$: $E(Z_n) = \frac{n+1}{c+1}$.
<u>Initialisation.</u> On a vu que $E(Z_c) = 1$ donc la propriété est vraie au rang c.
<u>Hérédité.</u> Soit $n > c$. On suppose que la propriété est vraie au rang $n - 1$, c'est-à-dire que $E(Z_{n-1}) = \frac{n}{c+1}$. La formule de la question précédente montre que :

$$E(Z_n) = 1 + \left(1 - \frac{c}{n}\right)E(Z_{n-1}) = 1 + \frac{n-c}{n} \times \frac{n}{c+1} = \frac{n+1}{c+1}.$$

La propriété est donc vraie au rang n, et l'hérédité est établie.
<u>Conclusion.</u> Par récurrence la propriété est vraie pour tout entier $n \geqslant c$, et donc on a prouvé de nouveau la formule :

$$E(Z_n) = \frac{n+1}{c+1}.$$

Partie D optionnelle. Calcul de la variance de Z.

Méthode 1.

En suivant la méthode de la partie B on obtient successivement :

$$E((Z(Z-1)) = \frac{1}{\binom{n}{c}} \sum_{k=1}^{n-c+1} k(k-1)\binom{n-k}{c-1} = \frac{2}{\binom{n}{c}} \sum_{i=1}^{n-c} i\binom{n-i}{c}$$

$$= \frac{2}{\binom{n}{c}} \sum_{j=1}^{n-c} \binom{n-j+1}{c+1} = \frac{2\binom{n+1}{c+2}}{\binom{n}{c}} = \frac{2(n+1)(n-c)}{(c+1)(c+2)}.$$

On calcule ensuite la variance :

$$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = E(Z(Z-1)) + E(Z)(1-E(Z))$$
$$= \frac{2(n+1)(n-c)}{(c+1)(c+2)} + \frac{(n+1)(c-n)}{(c+1)^2}.$$

Ce qui aboutit à :

$$V(Z) = \frac{(n+1)(n-c)c}{(c+1)^2(c+2)}.$$

Méthode 2.

En suivant la méthode de la partie C on obtient :

$$E(Z_n^2) = \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{c}{n}\right)\Big[E(Z_{n_1}^2) + 2E(Z_{n-1}) + 1\Big].$$

On en déduit :

$$V(Z_n) = \left(1 - \frac{c}{n}\right)\Big[V(Z_{n-1}) + \frac{c}{n}E(Z_{n-1})^2\Big].$$

Soit la formule de récurrence :

$$V(Z_n) = \frac{n-c}{n}V(Z_{n-1}) + \frac{(n-c)c}{(c+1)^2}.$$

On calculant cette valeur pour $n = c$, $c+1$, $c+2$, $c+3$ on devine la formule :

$$\forall n \geqslant c \quad V(Z_n) = \frac{(n+1)(n-c)c}{(c+1)^2(c+2)}.$$

On démontre celle-ci par récurrence.

Commentaires.

Si $c = 1$ ou $c = 2$ on retrouve les variances de X et de Y :

$$\text{Si} \quad c = 1 \quad \text{alors} \quad V(Z_n) = \frac{(n+1)(n-1)}{12}$$

$$\text{Si} \quad c = 2 \quad \text{alors} \quad V(Z_n) = \frac{(n+1)(n-2)}{18}.$$

De plus la variance est nulle si $c = n$, ce qui s'explique car dans ce cas l'urne ne contient que des boules de cuivre, donc la première apparaît au premier tirage : la variable aléatoire Z_n est constante égale à 1, donc $E(Z_n) = 1$ et $V(Z_n) = 0$.