Feuille d'exercices 25
Espaces euclidiens

1 - Produit scalaire et norme

Exercice 1. Dans $E = \mathbb{R}^2$, on pose, pour tous $u = (x_1, y_1)$ et $v = (x_2, y_2)$,

$$\langle u, v\rangle = 2x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2y_1y_2.$$

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, et soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ telles que :

$$\forall u \in E, \quad \|f(u)\| = \|g(u)\|.$$

Montrer que : $\forall u, v \in E,\ \langle f(u), f(v)\rangle = \langle g(u), g(v)\rangle$.

Exercice 3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, puis $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geq n^2$.

Exercice 4. Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right)^2 \leq n \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}^2$.

Exercice 5. Soit E un espace euclidien.
Montrer que l'application $f : \left\{\begin{array}{ccc} E & \to & \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \\ u & \mapsto & \langle u, \cdot\rangle \end{array}\right.$ est un isomorphisme.

2 - Orthogonalité

Exercice 6. Soient E un espace euclidien et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que :

$$(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \quad \text{et} \quad F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp.$$

Exercice 7. Soient E l'espace préhilbertien des suites stationnaires à 0 muni du produit scalaire :

$$\forall u, v \in E, \quad \langle u, v\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n,$$

et $F = \left\{u \in E \mid \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 0\right\}$. Déterminer $F^\perp$, et vérifier que $F + F^\perp \neq E$.

Exercice 8. Soient E un espace euclidien de dimension n et $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_p)$ une famille de vecteurs unitaires de E telle que :

$$\forall u \in E, \quad \|u\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \langle u, e_i\rangle^2.$$

Montrer que $\mathcal{F}$ est une base orthonormée de E.

Exercice 9. Orthonormaliser les bases suivantes :

(a) Dans $E = \mathbb{R}^2$, $e_1 = (1, 1)$ et $e_2 = (1, 0)$,

(b) Dans $E = \mathbb{R}^3$, $e_1 = (1, 1, -1)$, $e_2 = (1, -1, 1)$ et $e_3 = (-1, 1, 1)$,

(c) Dans $E = \mathbb{R}^4$, $e_1 = (0, 1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 0, 1, 1)$, $e_3 = (1, 1, 0, 1)$ et $e_4 = (1, 1, 1, 0)$.

3 - Projecteurs orthogonaux

Exercice 10. Soient E un espace euclidien, $u_0 \in E$, $F = \text{Vect}(u_0)^\perp$, p le projecteur orthogonal sur F et s la symétrie orthogonale par rapport à F. Montrer que :

$$\forall u \in E, \quad p(u) = u - \frac{\langle u, u_0 \rangle}{\|u_0\|^2} u_0 \quad \text{et} \quad s(u) = u - 2\frac{\langle u, u_0 \rangle}{\|u_0\|^2} u_0.$$

Exercice 11. Soient E un espace euclidien et p un projecteur de E. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si :

$$\forall u \in E, \quad \|p(u)\| \leq \|u\|.$$

Exercice 12. On munit $E = \mathbb{R}[X]$ du produit scalaire :

$$\forall P, Q \in E, \quad \langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

(a) Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

(b) En déduire $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt$.

Exercice 13. On munit $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ du produit scalaire :

$$\forall f, g \in E, \quad \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

On note $F = \text{Vect}\left(x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2\right)$. Déterminer la distance de $\exp$ à F.

Exercice 14. On munit $E = M_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel. Soit $M \in E$, et soit $U \in E$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Déterminer $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \|M - aI_n - bU\|$.