Devoir surveillé n° 8

Durée : 3 heures. Calculatrices non autorisées.
La notation tiendra largement compte de la qualité de la rédaction.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre souhaité.
Les exercices qui ne sont pas traités dans l'ordre doivent être rédigés sur des copies séparées.
Le sujet et le brouillon ne sont pas à rendre. Le barème est indicatif.

Exercice 1. *(8 points)* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$.

1. Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire qu'elle converge.
2. Montrer par intégration par parties que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n$.
3. Déduire de la question précédente que :
   (a) la suite de terme général $J_n = (n+1)W_nW_{n+1}$ est constante, et la déterminer,
   (b) $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} W_{n+1}$,
   (c) pour tout $p \geq 0$: $W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\dfrac{\pi}{2}$.
4. En déduire que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$, puis la *formule de Wallis* : $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \frac{\sqrt{p}}{2^{2p}}\binom{2p}{p} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Exercice 2. *(10 points)*

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On considère un point mobile M se déplaçant dans $\mathbb{R}^d$. Initialement, M est à l'origine $0_{\mathbb{R}^d}$. À chaque instant, M est translaté par un vecteur $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d)$, où : $\forall i \in [\![1, d]\!]$, ε_i vaut -1 ou 1 de façon équiprobable, et les ε_i sont indépendants les uns des autres.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $X_{1,n},\ X_{2,n}, \dots, X_{d,n}$ les coordonnées de M après n déplacements.

1. On suppose que $d = 1$. Le point M se déplace donc sur une droite, d'une unité (± 1) à chaque instant.
   (a) Soit D_n le nombre de déplacements positifs ($+1$) de M en n déplacements. Déterminer la loi de D_n.
   (b) Déterminer $X_{1,n}$ en fonction de D_n. En déduire l'espérance et la variance de $X_{1,n}$. Interpréter.
   (c) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X_{1,2p} = 0) = \dfrac{1}{2^{2p}}\dbinom{2p}{p}$ et $\mathbb{P}(X_{1,2p+1} = 0) = 0$.
   (d) À l'aide de la formule de Wallis ci-dessus, déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X_{1,n} = 0)$.
2. On se place dans le cas général $d \in \mathbb{N}^*$.
   On note R_n l'événement « le point M se trouve à l'origine après n déplacements ».
   (a) Écrire R_n en fonction des événements « $X_{i,n} = 0$ », avec $i \in [\![1, d]\!]$.
   (b) En déduire un équivalent simple de $\mathbb{P}(R_{2p})$ lorsque $p \to +\infty$.
   (c) À quelle condition sur d la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(R_n)$ est-elle convergente ?
   (d) Montrer, dans ce cas, que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} R_k\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   Que peut-on en déduire sur le nombre de passages du point M à l'origine ?

Exercice 3. *(6 points)* Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $M(x) = \begin{pmatrix} x & -b & -c & -d \\ b & x & -d & c \\ c & d & x & -b \\ d & -c & b & x \end{pmatrix}$.

1. Justifier que la fonction $x \mapsto \det(M(x))$ est polynomiale de degré 4, et déterminer son coefficient dominant.
2. On note $A = M(a)$. Calculer $({}^tA) \cdot A$.
3. En déduire la valeur de $\det(A)$. À quelle condition la matrice A est-elle inversible ?
4. Ces résultats restent-ils vrais si $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$?

Problème. *(16 points)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le but de ce problème est de trouver une méthode de calcul des sommes S_p définies par :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad S_p = \sum_{k=1}^{n} k^p.$$

I. 1. Écrire S_0, S_1, S_2 (sans démonstration).

2. Soit $p \in \mathbb{N}$. On considère la fonction $f : x \mapsto x^p$.
Écrire la $n^{\text{ème}}$ somme de Riemann à droite D_n de f entre 0 et 1, et déterminer D_n en fonction de S_p.

3. Quelle est la limite de la suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$? En déduire un équivalent simple de S_p quand $n \to +\infty$.

II. Soit $p \in \mathbb{N}$. On améliore le calcul ci-dessus pour déterminer les termes suivants du développement asymptotique de S_p :
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ quelconque.

1. Montrer que : $\displaystyle\left(\int_0^1 f\right) - D_n = \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) dx.$

2. Soit $k \in [\![1,n]\!]$, soit $x \in \left[\dfrac{k-1}{n}, \dfrac{k}{n}\right]$. Soit $N \in \mathbb{N}$.
Appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre N à la fonction f entre $a = \dfrac{k}{n}$ et $b = x$.

3. On reprend dans la suite de cette partie $f : x \mapsto x^p$.
Que devient la formule de la question précédente pour $N = p$?

4. En déduire que : $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) dx = \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{j=1}^{p} \frac{(-1)^j}{j+1} \binom{p}{j} k^{p-j}.$

5. En déduire la formule :
$$\sum_{j=0}^{p} (-1)^j \binom{p+1}{j+1} S_{p-j} = n^{p+1}.$$

III. On note $S = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \\ n^5 \end{pmatrix}$.

1. Déduire de la formule ci-dessus la matrice $A \in M_5(\mathbb{R})$ telle que : $AS = P$.
On écrira explicitement ses coefficients.
2. Calculer le déterminant de A, et vérifier que cette matrice est inversible.
3. Inverser la matrice A. En déduire S_3 et S_4.
4. Comment trouver S_5 avec cette méthode ?