Devoir surveillé n° 8
CORRIGÉ

Exercice 1.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0,1]$, $\sin(x) \leq 1$, donc $\sin^{n+1}(x) \leq \sin^n(x)$, donc par croissance de l'intégrale, $W_{n+1} \leq W_n$. Donc la suite (W_n) est décroissante.
   De plus, pour tout $x \in [0,1]$, $\sin(x) \geq 0$, donc $\sin^n(x) \geq 0$, donc par positivité de l'intégrale, $W_n \geq 0$. Donc la suite (W_n) est décroissante et minorée par 0, donc convergente.
2. Soit $n \geq 0$. Par intégration par parties :
$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(x)dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\sin^{n+1}(x)dx \\ &= \left[-\cos(x)\sin^{n+1}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \times (n+1)\cos(x)\sin^n(x)dx \\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\sin^n(x)dx, \end{aligned}$$
   donc $W_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(x))\sin^n(x)dx = (n+1)(W_n - W_{n+2})$, d'où le résultat.
3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, d'après la question précédente :
$$J_{n+1} = (n+2)W_{n+1}W_{n+2} = W_{n+1} \times (n+1)W_n = J_n,$$
   donc la suite (J_n) est constante égale à $J_0 = W_0W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^1 = \frac{\pi}{2} \times 1 = \frac{\pi}{2}$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme la suite (W_n) est décroissante, on a :
$$W_n \geq W_{n+1} \geq W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n,$$
   donc $1 \geq \frac{W_{n+1}}{W_n} \geq \frac{n+1}{n+2}$. Donc, par encadrement : $\frac{W_{n+1}}{W_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, d'où le résultat.

   (c) Soit $p \geq 0$. Alors :
$$W_{2p} = \frac{2p-1}{2p}W_{2p-2} = \frac{2p-1}{2p}\frac{2p-3}{2p-2}\cdots\frac{1}{2}W_0 = \frac{(2p)!}{(2p(2p-2)\cdots 2)^2}W_0 = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}.$$
4. D'après les résultats des questions 3.(a) et 3.(b), $nW_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$, donc $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
   En particulier, $W_{2p} \underset{p\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4p}}$, donc $\sqrt{p}W_{2p} = \frac{\sqrt{p}}{2^{2p}}\binom{2p}{p}\frac{\pi}{2} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{\pi}{4}}$, ce qui est le résultat voulu.
   Le mathématicien anglais John Wallis (1616-1703) énonce ce résultat en 1656.

Exercice 2.

1. (a) La variable D_n suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$: $D_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

   (b) On a directement : $X_{1,n} = D_n - (n - D_n) = 2D_n - n$. On a alors :

   - par linéarité de l'espérance : $E(X_{1,n}) = 2E(D_n) - n = 2n \times \frac{1}{2} - n = 0$,
   - par invariance et quadraticité de la variance : $V(X_{1,n}) = 4V(D_n) = 4n \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = n$.

   La position moyenne du point M est donc l'origine de la droite, avec un écart-type de $\sqrt{n}$.

   (c) On a : $X_{1,n} = 0 \Leftrightarrow 2D_n - n = 0 \Leftrightarrow D_n = \frac{n}{2}$. Cette dernière assertion est impossible si n est impair, donc : $\forall p \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X_{1,2p+1} = 0) = 0$. Si n est pair, alors on écrit $n = 2p$, et : $X_{1,2p} = 0 \Leftrightarrow D_{2p} = p$, et donc, comme $D_{2p} \hookrightarrow \mathcal{B}\left(2p, \frac{1}{2}\right)$:

   $$\mathbb{P}(X_{1,2p} = 0) = \mathbb{P}(D_{2p} = p) = \binom{2p}{p}\left(\frac{1}{2}\right)^p\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{2p-p} = \frac{1}{2^{2p}}\binom{2p}{p}.$$

   (d) D'après la formule de Wallis : $\mathbb{P}(X_{1,2p} = 0) \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi p}}$.

   Or : $\forall p \geq 0,\ \mathbb{P}(X_{1,2p} = 0) \geq 0$ et la série $\sum_{p\geq 0} \frac{1}{\sqrt{p}}$ est la série de Riemann de paramètre $\frac{1}{2}$, donc diverge, donc, d'après le théorème d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum_{p\geq 0} \mathbb{P}(X_{1,2p} = 0)$ diverge. C'est une sous-série de la série $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X_{1,n} = 0)$, donc cette dernière diverge également.

2. (a) On a : $R_n = \bigcap_{i=1}^{d} (X_{i,n} = 0)$.

   (b) Comme les X_i sont supposés mutuellement indépendants, on a :

   $$\mathbb{P}(R_{2p}) = \prod_{i=1}^{d} \mathbb{P}(X_{i,n} = 0) \underset{p\to+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi p}}\right)^d = \frac{1}{(\pi p)^{\frac{d}{2}}}.$$

   (c) D'après le théorème d'équivalence des séries à termes positifs, $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(R_n)$ converge si et seulement si $\sum_{p\geq 0} \frac{1}{p^{\frac{d}{2}}}$ converge, c'est-à-dire lorsque $\frac{d}{2} > 1$ d'après le critère de Riemann ; c'est-à-dire lorsque $d > 2$, c'est-à-dire lorsque $d \geq 3$.

   (d) Supposons $d \geq 3$. Comme la série $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(R_n)$ converge, la suite de ses restes converge vers 0 : $\sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(R_k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Or : $0 \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} R_k\right) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(R_k)$, donc, par encadrement, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} R_k\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   Si $d \geq 3$, M ne passe donc, avec probabilité 1 (*presque sûrement*), par l'origine qu'un nombre fini de fois : on dit que le déplacement de M (appelé une *marche aléatoire isotrope*) est *transitoire*. Si $d \leq 2$, M passe au contraire par l'origine une infinité de fois : la marche de M est *récurrente*.

   Une fourmi ivre retrouve donc presque sûrement sa fourmilière, contrairement à un oiseau. Ce célèbre théorème, publié en 1921, est dû au mathématicien hongrois George Pólya (1887-1985).

Exercice 3.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Le développement de $\det(M(x))$ par rapport à la première colonne (par exemple) assure que $\det(M(x))$ est polynomial en x, et le terme de degré maximal est obtenu en multipliant les termes diagonaux, soit x^4 : le coefficient dominant est donc égal à 1.
2. On a directement : $({}^tA)\cdot A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} = (a^2+b^2+c^2+d^2)I_4.$
3. D'après le résultat précédent, on a : $\det\left(({}^tA)\cdot A\right) = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4\det(I_4)$, donc $\det(A)^2 = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4$, donc $\det(A) = \pm(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$. On a vu que le terme de degré maximal en a de $\det(A)$ est a^4, donc : $\det(A) = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.
   La matrice A est alors inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$, c'est-à-dire lorsque $a^2+b^2+c^2+d^2 \neq 0$, c'est-à-dire lorsque $(a,b,c,d) \neq (0,0,0,0)$.
4. Si $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$, on a toujours $\det(A) = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$; mais $(a,b,c,d) = (0,0,0,0)$ n'est plus le seul cas où A est non inversible. Par exemple, pour $(a,b,c,d) = (1,i,1,i)$, $\det(A) = 0$, donc A est non inversible.

Problème.

I. 1.
   - $S_0 = \sum_{k=1}^{n} k^0 = n$,
   - $S_1 = \sum_{k=1}^{n} k^1 = \frac{n(n+1)}{2}$,
   - $S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   2. Par définition : $D_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^p}{n^p} = \frac{S_p}{n^{p+1}}$.

   3. D'après le théorème de convergence des séries de Riemann :

$$D_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f = \int_0^1 x^p dx = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+1}.$$

   On a donc : $\frac{S_p}{n^{p+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p+1}$, c'est-à-dire : $S_p \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{p+1}}{p+1}$.

II. 1. D'après la relation de Chasles : $\int_0^1 f = \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx$,

   et comme on l'a vu : $D_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right)dx$;

   d'où, par linéarité de l'intégrale, la formule voulue.

   2. Comme f est de classe C^∞, la formule de Taylor avec reste intégral s'applique, et on a :

$$f(x) = \sum_{j=0}^{N} f^{(j)}\left(\frac{k}{n}\right)\frac{\left(x-\frac{k}{n}\right)^j}{j!} + \int_{\frac{k}{n}}^{x} f^{(N+1)}(t)\frac{(x-t)^N}{N!}dt.$$

3. On a dans ce cas : $f^{(p+1)} = 0$ et : $\forall j \in [\![0,p]\!]$, $f^{(j)}\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{p!}{(p-j)!}\left(\frac{k}{n}\right)^{p-j}$, donc la formule ci-dessus s'écrit :

$$f(x) = \sum_{j=0}^{p} \frac{p!}{(p-j)!}\left(\frac{k}{n}\right)^{p-j} \frac{\left(x-\frac{k}{n}\right)^j}{j!} = \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j}\left(\frac{k}{n}\right)^{p-j}\left(x-\frac{k}{n}\right)^j.$$

On retrouve donc la formule du binôme de Newton !

4. Soit $k \in [\![1,n]\!]$. D'après la formule précédente :

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) dx = \sum_{j=1}^{p} \binom{p}{j}\left(\frac{k}{n}\right)^{p-j} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(x-\frac{k}{n}\right)^j dx,$$

où, pour tout $j \in [\![1,p]\!]$:

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(x-\frac{k}{n}\right)^j dx = \left[\frac{\left(x-\frac{k}{n}\right)^{j+1}}{j+1}\right]_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} = -\frac{(-1)^{j+1}}{(j+1)n^{j+1}} = \frac{(-1)^j}{(j+1)n^{j+1}}.$$

Donc :

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) dx = \sum_{j=1}^{p} \binom{p}{j} \frac{k^{p-j}}{n^{p-j}} \frac{(-1)^j}{(j+1)n^{j+1}} = \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{j=1}^{p} \frac{(-1)^j}{j+1}\binom{p}{j} k^{p-j}.$$

5. On somme les intégrales précédentes pour k allant de 1 à n. On a alors, d'après la question 1. :

$$\int_0^1 f - D_n = \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{j=1}^{p} \frac{(-1)^j}{j+1}\binom{p}{j} \sum_{k=1}^{n} k^{p-j},$$

et donc, d'après la question I.2. :

$$\frac{1}{p+1} - \frac{S_p}{n^{p+1}} = \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{j=1}^{p} \frac{(-1)^j}{j+1}\binom{p}{j} S_{p-j}.$$

On a alors :

$$n^{p+1} = \sum_{j=0}^{p} (-1)^j \frac{p+1}{j+1}\binom{p}{j} S_{p-j} = \sum_{j=0}^{p} (-1)^j \binom{p+1}{j+1} S_{p-j},$$

puisque : $\forall j \in\in [\![0,p]\!]$, $\frac{p+1}{j+1}\binom{p}{j} = \frac{p+1}{j+1}\frac{p!}{j!(p-j)!} = \frac{(p+1)!}{(j+1)!(p-j)!} = \binom{p+1}{j+1}$.

III. 1. D'après la question précédente, et en reconnaissant les coefficients du triangle de Pascal :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 6 & 4 & 0 \\ 1 & -5 & 10 & -10 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Comme la matrice A est triangulaire inférieure, on a directement : $\det(A) = 5! = 120 \neq 0$, donc A est inversible.

3. D’après la méthode du pivot :

$$
(A \mid I_5) \underset{\substack{C_4 \leftarrow C_4+2C_5 \\ C_3 \leftarrow C_3-2C_5 \\ C_2 \leftarrow C_2+C_5 \\ C_1 \leftarrow C_1-\frac{C_5}{5}}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & 4 & 6 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -\frac{1}{5} & 1 & -2 & 2 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\underset{\substack{C_3 \leftarrow C_3+\frac{3}{2}C_4 \\ C_2 \leftarrow C_2-C_4 \\ C_1 \leftarrow C_1+\frac{C_4}{4}}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 4 & 0 & \frac{1}{4} & -1 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 5 & \frac{3}{10} & -1 & 1 & 2 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2+C_3 \\ C_1 \leftarrow C_1-\frac{C_3}{3}}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -\frac{1}{30} & 0 & 1 & 2 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\underset{C_1 \leftarrow C_1+\frac{C_2}{2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -\frac{1}{30} & 0 & 1 & 2 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\underset{\substack{C_2 \leftarrow \frac{C_2}{2} \\ C_3 \leftarrow \frac{C_3}{3} \\ C_4 \leftarrow \frac{C_4}{4} \\ C_5 \leftarrow \frac{C_5}{5}}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{30} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5}
\end{array}\right),
$$

donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$. On retrouve S_0, S_1 et S_2, puis :

$$
S_3 = \frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \quad \text{et} \quad S_4 = \frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30} = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.
$$

4. Il suffit d’écrire la matrice $A \in M_6(\mathbb{R})$ telle que $AS = P$, inversible de la même façon. On peut ainsi déterminer S_p pour n’importe quel p !
Les coefficients de la matrice A^{-1} sont appelés les nombres de Bernoulli. *Ils ont été découverts par le mathématicien suisse Jacques Bernoulli (1654-1705) en 1689.*