Devoir à la maison n° 15

Exercice 1. Soit $\alpha > 1$, et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

1. Soit $\beta < \alpha$. Montrer que la suite $(n^\beta u_n)$ est décroissante à partir d'un certain rang.
2. En déduire que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
3. À l'aide de ce critère, déterminer la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{\binom{2n}{n}}{n \times 2^{2n}}$.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour $P, Q \in E$, on note :

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x P(t)Q(t)e^{-t}dt.$$

(On admet l'existence de la limite ci-dessus.)

1. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur E.
2. On note $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ l'orthonormalisée de Gram-Schmidt pour $\langle\cdot,\cdot\rangle$ de la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de E.
   (a) Calculer $P_0,\ P_1,\ P_2$.
   On pourra commencer par montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt = n!$.
   Soit $i \in [\![0, n]\!]$.
   (b) Justifier que : $\forall Q \in \mathbb{R}_{i-1}[X],\ \langle P_i, Q\rangle = 0$.
   (c) En intégrant par parties $\langle P_i, P_i'\rangle$, montrer que $P_i(0)^2 = 1$.
3. On note $F = \{P \in E \mid P(0) = 0\}$.
   (a) Justifier que $F^\perp$ est une droite. On note T un vecteur directeur de celle-ci.
   (b) On note $\alpha = \langle T, 1\rangle$. Montrer que : $\forall i \in [\![0, n]\!],\ \langle T, P_i\rangle = \alpha P_i(0)$.
   (c) En déduire $\|T\|$ en fonction de α, et en déduire un vecteur directeur unitaire de $F^\perp$.
   (d) En déduire la distance de 1 à F.