Feuille d'exercices 26
FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

1 - FONCTIONS CONTINUES

Exercice 1. Déterminer la limite quand (x, y) tend vers $(0, 0)$ de :

(a) $f(x, y) = xe^{-y^2}$,

(b) $f(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,

(c) $f(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 - y^2}}$,

(d) $f(x, y) = \dfrac{e^{xy} - 1}{x}$,

(e) $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$,

(f) $f(x, y) = x^y$.

Exercice 2. Montrer que l'application $f : (x, y) \mapsto \dfrac{\sin(x^2 + y)}{\sqrt{1 + x^2 e^y}}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On note Δ la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $y = x$ et $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x, y) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} & \text{si} \quad (x, y) \notin \Delta \\ f'(x) & \text{si} \quad (x, y) \in \Delta \end{cases}.$$

(a) Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \varphi(x, y) = \displaystyle\int_0^1 f'\left((1 - t)x + ty\right) dt$.

(b) En déduire que φ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2 - DÉRIVÉES PARTIELLES

Exercice 4. Justifier l'existence des dérivées partielles des fonctions suivantes, et les calculer :

(a) $f(x, y) = e^x \cos(y)$,

(b) $f(x, y) = (x^2 + y^2) \cos(xy)$,

(c) $f(x, y) = \dfrac{e^{xy}}{x + y}$,

(d) $f(x, y) = x^y$,

(e) $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 y^2}$,

(f) $f(x, y) = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Exercice 5. Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

(a) $g(x, y) = f(y, x)$,

(b) $g(x) = f(x, x)$,

(c) $g(x, y) = f(y, f(x, x))$,

(d) $g(x) = f(x, f(x, x))$.

Exercice 6. Soit $f : (\mathbb{R}^2)^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \dfrac{x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{4}}}$.

(a) Montrer que f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Étudier l'existence de dérivées partielles en $(0, 0)$ pour ce prolongement.

Exercice 7. Les fonctions f suivantes, définies sur $\mathbb{R}^2$ avec $f(0,0)=0$, sont-elles de classe C^1 ?

(a) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2}$,

(b) $f(x,y)=x^2y^2\ln(x^2+y^2)$,

(c) $f(x,y)=x\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$,

(d) $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.

Exercice 8. Soit $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue, puis $f:(x,y)\mapsto\displaystyle\int_{x^2}^{xy}\varphi$. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, et calculer ses dérivées partielles.

Exercice 9. Déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe C^1 solutions des systèmes suivants :

(a) $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x} &= xy^2\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= yx^2\end{cases}$,
(b) $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x} &= e^xy\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= e^x+2y\end{cases}$,
(c) $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x} &= x^2y\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= xy^2\end{cases}$.

Exercice 10. Déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe C^1 solutions des équations suivantes :

(a) $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$,
(b) $x\dfrac{\partial f}{\partial y}-y\dfrac{\partial f}{\partial x}=0$.

3 - Extrema

Exercice 11. Déterminer les points critiques et les extrema locaux des fonctions $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définies, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, par :

(a) $f(x,y)=x^2+xy+y^2-3x-6y$,

(b) $f(x,y)=x^2+2y^2-2xy-2y+1$,

(c) $f(x,y)=x^3+y^3$,

(d) $f(x,y)=(x-y)^2+(x+y)^3$,

(e) $f(x,y)=x^2+y^3$,

(f) $f(x,y)=x^4+y^3-3y-2$,

(g) $f(x,y)=x^3+xy^2-x^2y-y^3$,

(h) $f(x,y)=x^2y^2(1+x+2y)$.

Exercice 12. Dans les cas suivants, montrer que f admet un maximum sur K, et le déterminer :

(a) $f(x,y)=xy(1-x-y)$ et $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x,y\geq 0 \text{ et } x+y\leq 1\}$,

(b) $f(x,y)=x-y+x^3+y^3$ et $K=[0,1]^2$,

(c) $f(x,y)=\sin(x)\sin(y)\sin(x+y)$ et $K=\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]^2$.

Exercice 13. Soit $n\geq 2$, $f:\begin{cases}\mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}\\ (x_1,\ldots,x_n) &\mapsto x_1\cdots x_n\end{cases}$, et $K=\big\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}_+^n\mid x_1+\ldots+x_n=1\big\}$.

(a) Montrer que f admet un maximum global sur K et le déterminer.

(b) En déduire que : $\forall(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}_+^n$, $\displaystyle\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}}\leq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$.

Exercice 14. Soit ABC un triangle. Montrer que la fonction $M\mapsto AM^2+BM^2+CM^2$ admet un minimum, et que celui-ci est atteint en un unique point.