Devoir à la maison n$^\circ$ 15
CORRIGÉ

Exercice 1.

1. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = n^\beta u_n$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{(n+1)^\beta u_{n+1}}{n^\beta u_n} \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)^\beta \frac{u_{n+1}}{u_n} \\
&= \left(1+\frac{\beta}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1-\frac{\alpha}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= 1+\frac{\beta-\alpha}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right),
\end{aligned}$$

où $\beta-\alpha<0$, donc $\frac{v_{n+1}}{v_n}<1$ à partir d'un certain rang N, et donc : $\forall n \geq N,\ v_{n+1}<v_n$, donc la suite (v_n) est décroissante à partir du rang N.

2. Comme (v_n) est décroissante à partir d'un certain rang et minorée par 0, elle est en particulier majorée par un certain $M \in \mathbb{R}_+$. On a alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq \frac{M}{n^\beta}$.
Or, comme $\alpha>1$, ceci est en particulier vrai pour tout $\beta \in]1,\alpha[$. Pour un tel β (par exemple $\beta=\frac{\alpha+1}{2}$), d'après le critère de Riemann, la série $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{M}{n^\beta}$ converge, donc, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.

3. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n\times 2^{2n}}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N},\quad \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2}\frac{n!^2}{(2n)!}\frac{n\times 2^{2n}}{(n+1)\times 2^{2n+2}} \\
&= \frac{n(2n+1)(2n+2)}{4(n+1)^3} \\
&= \frac{4n^3+6n^2+\underset{n\to+\infty}{o}(n^2)}{4n^3+12n^2+\underset{n\to+\infty}{o}(n^2)} \\
&= \frac{1+\frac{3}{2n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)}{1+\frac{3}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)} \\
&= \left(1+\frac{3}{2n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1-\frac{3}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= 1-\frac{3}{2n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

La série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$, à termes positifs, vérifie donc notre critère, avec $\alpha=\frac{3}{2}>1$, donc elle converge.
Ce critère de convergence est appelé le critère de Raabe-Duhamel.

Exercice 1.

1. - Par définition, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme sur $E\times E$.
   - Soient $P_1,\ P_2,\ Q\in E$ et $\lambda,\ \mu\in\mathbb{R}$, alors, par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\langle\lambda P_1+\mu P_2,Q\rangle &= \int_0^{+\infty}(\lambda P_1+\mu P_2)(t)Q(t)e^{-t}dt\\ &= \int_0^{+\infty}\left(\lambda P_1(t)+\mu P_2(t)\right)Q(t)e^{-t}dt\\ &= \lambda\int_0^{+\infty}P_1(t)Q(t)e^{-t}dt+\mu\int_0^{+\infty}P_2(t)Q(t)e^{-t}dt\\ &= \lambda\langle P_1,Q\rangle+\mu\langle P_2,Q\rangle,\end{aligned}$$

   donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est linéaire à gauche,
   - Soient $P,\ Q\in E$, on a :

$$\langle Q,P\rangle=\int_0^{+\infty}Q(t)P(t)e^{-t}dt=\int_0^{+\infty}P(t)Q(t)e^{-t}dt=\langle P,Q\rangle,$$

   donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est symétrique, donc linéaire à droite, donc bilinéaire,
   - Soit $P\in E$, on a, par commutativité de la multiplication : $\langle P,P\rangle=\displaystyle\int_0^{+\infty}P(t)^2e^{-t}dt$ où : $\forall t\in\mathbb{R}_+,\ P(t)^2e^{-t}\geq 0$ donc, par positivité de l'intégrale, $\langle P,P\rangle\geq 0$. Puis, par définie positivité de l'intégrale :

$$\langle P,P\rangle=0\Rightarrow\left(\forall t\in\mathbb{R}_+,\ P(t)^2e^{-t}=0\right)\Rightarrow(\forall t\in\mathbb{R}_+,\ P(t)=0)\Rightarrow P=0_{\mathbb{R}[X]},$$

   car seul le polynôme nul possède une infinité de racines. Donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive.

   Donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E.

2. (a) On a : $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t}dt=\left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty}=1=0!$, puis :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad\int_0^{+\infty}t^ke^{-t}dt=\left[-t^ke^{-t}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}kt^{k-1}e^{-t}dt=k\int_0^{+\infty}t^{k-1}e^{-t}dt,$$

   donc, par récurrence :

$$\int_0^{+\infty}t^ke^{-t}dt=k!\int_0^{+\infty}e^{-t}dt=k!.$$

   On note $(\tilde{P}_0,\ldots,\tilde{P}_n)$ l'orthogonalisée de la base canonique.
   - On a $\|1\|^2=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t}dt=0!=1$, donc $P_0=1$,
   - On a $\langle X,P_0\rangle=\displaystyle\int_0^{+\infty}te^{-t}dt=1!=1$, donc :

$$\tilde{P}_1=X-\langle X,P_0\rangle P_0=X-1,$$

   avec $\|\tilde{P}_1\|^2=\displaystyle\int_0^{+\infty}(t-1)^2e^{-t}dt=\int_0^{+\infty}(t^2-2t+1)e^{-t}dt=2!-2\times 1!+0!=1$, donc $P_1=\tilde{P}_1=X-1$,

- On a $\langle X^2, P_0\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt = 2! = 2$ et $\langle X^2, P_1\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^2(t-1)e^{-t}dt = 3! - 2! = 4$, donc :

$$\tilde{P}_2 = X^2 - \langle X^2, P_0\rangle P_0 - \langle X^2, P_1\rangle P_1 = X^2 - 2 - 4(X-1) = X^2 - 4X + 2,$$

avec $\|\tilde{P}_2\|^2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} (t^2 - 4t + 2)^2 e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} (t^4 - 8t^3 + 20t^2 - 16t + 4)e^{-t}dt = 4! - 8 \times 3! + 20 \times 2! - 16 \times 1! + 4 \times 0! = 4$, donc $P_2 = \dfrac{\tilde{P}_2}{2} = \dfrac{X^2}{2} - 2X + 1$.

(b) D'après le procédé de Gram-Schmidt : $\mathbb{R}_{i-1}[X] = \mathrm{Vect}\left(1, X, \ldots, X^{i-1}\right) = \mathrm{Vect}\left(P_0, P_1, \ldots, P_{i-1}\right)$. Comme la base (P_i) est orthonormée, on a : donc : $\forall Q \in \mathbb{R}_{i-1}[X],\ \langle P_i, Q\rangle = 0$.

(c) On a :

$$\begin{aligned}
\langle P_i, P_i'\rangle &= \int_0^{+\infty} P_i'(t)P_i(t)e^{-t}dt \\
&= \left[P_i(t)^2 e^{-t}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} P_i(t) \times \left(P_i'(t)e^{-t} - P_i(t)e^{-t}\right) dt \\
&= -P_i(0)^2 - \langle P_i, P_i'\rangle + \|P_i\|^2.
\end{aligned}$$

Or $P_i' \in \mathbb{R}_{i-1}[X]$ donc, d'après la question précédente : $P_i(0)^2 = \|P_i\|^2 = 1$.

3. (a) F est le noyau de la forme linéaire $P \mapsto P(0)$, donc F est un hyperplan de E. Donc, comme E est de dimension finie, $F^\perp$ est une droite.

(b) Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Comme $P_i - P_i(0) \in F$, on a :

$$0 = \langle T, P_i - P_i(0)\rangle = \langle T, P_i\rangle - P_i(0)\langle T, 1\rangle,$$

donc $\langle T, P_i\rangle = \alpha P_i(0)$.

(c) Comme (P_i) est orthonormée, on a d'après le théorème de Pythagore :

$$\|T\|^2 = \sum_{i=0}^{n} \langle T, P_i\rangle^2 = \sum_{i=0}^{n} \alpha^2 P_i(0)^2 = \sum_{i=0}^{n} \alpha^2 = (n+1)\alpha^2.$$

Donc $\|T\| = 1$ si et seulement si $\alpha = \pm\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$. En choisissant par exemple $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$, un vecteur unitaire de $F^\perp$ est donc :

$$T_0 = \sum_{i=0}^{n} \langle T, P_i\rangle P_i = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{i=0}^{n} P_i(0)P_i.$$

(d) On a immédiatement : $d(1, F) = |\langle 1, T_0\rangle| = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.