

DS 1 (Corrigé).

La rédaction, l'argumentation et la présentation matérielle entrent dans une part significative de la notation; vous devrez aussi respecter la terminologie et les règles d'usage en vigueur. Les exercices, problèmes sont indépendants. Les résultats numériques seront encadrés et simplifiés. Si vous êtes amené à repérer ce qui peut vous sembler une erreur d'énoncé, vous êtes prié de le signaler sur votre copie et devrez poursuivre votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous prendriez.

Calculatrices autorisées.

Les exercices sont de difficulté croissante. Les trois premiers d'entr'eux sont OBLIGATOIRES. Toute réponse mitigée à ces exercices influera sur le jugement général de votre copie.

Exercice 1 (Analyse)

On se donne un réel $\alpha \geq 0$ et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^\alpha}{n^{\alpha+1}}$.

a) Prouver que la suite (S_n) converge vers une limite à préciser.

b) En déduire un équivalent, pour $n \rightarrow \infty$, de $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} k^\alpha$.

Solution : \triangleleft la suite n'a pas de sens pour $k < 0$. Personne ne semble s'en être ému.

On supposera $\alpha \geq 0$.

a) On reconnaît une somme de Riemann d'ordre n attachée à la fonction continue $h : x \in [0, 1] \rightarrow x^\alpha$, ce parce que l'exposant est positif. Ainsi le théorème sur les sommes de Riemann s'applique et prouve que

$$\xi_n \rightarrow \int_0^1 x^\alpha dx. \text{ Ainsi } \boxed{S_n \rightarrow \frac{1}{\alpha + 1}} \blacksquare$$

b) Dès lors $\boxed{T_n \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha + 1}}$ \blacksquare

\heartsuit Si $-1 < k < 0$ (Non exigible pour le DS): on pose $U_n = \sum_{k=1}^{n-1} k^\alpha$ puis, par considération d'aire, appliquée

au graphe de h , on vérifie que $U_n \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha + 1}$ et on retrouve pour la suite (S_n) (que l'on fait commencer à $k = 1$) la même limite que celle obtenue pour le cas $\alpha \geq 0$.

Exercice 2 (Algèbre)

On pose $E = \mathbb{R}[X]$ et on note $u : P \in E \rightarrow P + P'$.

a) Etablir que u est un endomorphisme de E .

b) Soient $n \geq 0$ et $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ appartenant à $\text{Ker}(u)$.

Montrer que tous les a_k son nuls.

En déduire que u est injectif.

Soit $P \in E$.

c) Vérifier le sens de $Q = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k P^{(k)}$.

d) Que vaut $u(Q)$? Que peut-on en déduire?

Solution : a) u est somme de l'identité de E et de la dérivation qui sont toutes deux des endomorphismes de E ; il en va de même de u \blacksquare

b) Dans ces conditions $u(P) = 0$ équivaut à $\sum_{k=0}^n a_k X^k + \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1} = 0$ puis en effectuant le changement

d'indice $j = k - 1$ dans la somme de droite, nous obtenons $u(P) = 0 \iff a_n X^n + \sum_{j=0}^{n-1} (a_j + (j+1)a_{j+1}) X^j = 0$.

Ce qui entraîne $a_n = 0$ et $a_j + (j+1)a_{j+1} = 0$, pour $0 \leq j \leq n - 1$; ce qui donne de proche en proche

$a_{n-1} = \dots a_0 = 0$ soit $P = 0$.

Le noyau de u étant, par ce qui précède, égal au vecteur nul, u est injectif ■

c) La somme est finie puisqu' à partir d'un certain rang les dérivées de P sont nulles; ceci justifie le sens de

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k P^{(k)} \blacksquare$$

d) On a sans peine et par linéarité (somme finie cf c)) : $u(Q) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k P^{(k)} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k P^{(k+1)}$ soit, avec

le changement d'indice $j = k + 1$ dans la seconde somme,

$$u(Q) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k P^{(k)} + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} P^{(j)} = P + \sum_{j=1}^{\infty} ((-1)^j + (-1)^{j-1}) P^{(j)} = P.$$

Il en résulte que u est aussi surjectif donc qu'il s'agit d'un automorphisme de E ■

Exercice 3 (Algèbre)

1) Soient E un \mathbb{R} espace vectoriel et f un endomorphisme de E .

a) Etablir que $x \in \text{Ker}(f + id_E) \iff f(x) = -x$.

b) En déduire que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Ker}(f + id_E)$ sont en somme directe.

On suppose de plus dans le c) que $f^2 = -f$.

c) Prouver que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Ker}(f + id_E)$ sont supplémentaires dans E .

2) On prend ici $E = \mathbb{R}^3$ et f est représenté dans la base canonique de E par la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 \\ 5 & -6 & 10 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(On dit aussi que f est l'endomorphisme de E canoniquement associé à la matrice M).

a) Déterminer $\text{Ker}(f)$ ainsi que $\text{Ker}(f + id_E)$ et vérifier qu'ils sont respectivement une droite et un plan vectoriel supplémentaires dans E .

b) Lien éventuel avec 1)c)?

Solution : 1)a) Evident. 1)b) Pour x dans ces deux noyaux, nous avons $f(x) = -x = 0_E$ donc $x = 0_E$ ■

1)c) On peut remarquer que $-f$ est un projecteur de E donc $E = \text{Ker}(-f) \oplus \text{Im}(-f)$. Mais on a aussi $\text{Ker}(-f) = \text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(-f) = \text{Ker}(-f - id_E) = \text{Ker}(f + id_E)$, d'après votre cours sur les projecteurs ainsi $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f + id_E)$ ■

2)a) Un calcul simple donne $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(4, 5, 1)$ et $\text{Ker}(f + id_E)$ est le plan d'équation $x - y + 2z = 0$, ce que l'on peut présenter aussi en écrivant que $\text{Ker}(f + id_E) = \text{Vect}((1, 1, 0); (-2, 0, 1))$.

Ces deux sev de E sont bien supplémentaires puisque la somme de leur dimension vaut $3 = \dim(E)$ et que leur intersection est bien réduite au vecteur nul puisque $(4, 5, 1) \notin \text{Ker}(f + id_E)$ (ce vecteur ne vérifie pas l'équation du plan) donc ils sont bien en somme directe ■

b) Un calcul indolore donne $M^2 = -M$ donc $f^2 = -f$; on retrouve le contexte général étudié en 1)c) ■

Exercice 4 (Algèbre)

Soient $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et F le sous-espace vectoriel constitué des solutions de l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$.

On rappelle que F est de dimension 2.

On définit les fonctions u et v par $u(x) = e^{-\frac{x}{2}} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$ et $v(x) = e^{-\frac{x}{2}} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$, ce pour tout réel x .

1) Vérifier que (u, v) est une famille libre de F puis que $F = \text{Vect}(u, v)$.

On pose $G = \{g \in E \text{ telle que } g(0) = g'(0) = 0\}$

2) Prouver que G est un supplémentaire de F dans E .

Solution : 1) On constate d'abord que u et v sont bien dans E comme produit de même type de fonctions. On peut éviter les calculs pénibles de dérivées, en considérant plutôt la fonction à valeurs complexes

$w = u + iv : x \rightarrow e^{jx}$, où $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. En effet, par simple dérivation d'une exponentielle $w'' + w' + w = (j^2 + j + 1)w = 0$ (puisque $j^2 + j + 1 = 0$, somme des racines cubiques de l'unité valant 0) donc par linéarité de la dérivation ($w' = u' + iv'$ etc...), on obtient $u'' + u' + u = v'' + v' + v = 0$. Donc u et v sont bien des éléments de F ; la liberté est rapide à mettre en évidence puisque ces fonctions ne peuvent pas être colinéaires car l'une s'annule en 0 et l'autre pas.

Comme F est un sev de E et que u, v sont dans F , on a $\text{Vect}(u, v) \subset F$ mais par ce qui précède

$\dim(\text{Vect}(u, v)) = \dim(F) = 2$ donc $F = \text{Vect}(u, v)$ ■

2) G étant une partie de E (par sa définition), contenant la fonction nulle et stable par combinaison linéaire (par linéarité combinée de la dérivation et de l'évaluation), c'est bien un sev de E .

Montrons que $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont en somme directe}}$ en considérant $f \in F$ telle que $f(0) = f'(0) = 0$ (en se servant du programme de première année, on reconnaît un problème de Cauchy satisfait par f qui admet une seule solution, comme la fonction nulle vérifie ce problème f est bien la fonction nulle).

Posons $f = au + bv$ alors $f(0) = 0$ entraîne $a = 0$ et $f'(0) = 0$ donne $b = 0$ donc $f = 0$ et F, G en somme directe.

Vérifions que $\boxed{E \subset F + G}$.

Donnons nous $h \in E$ et supposons $h = f + g$, pour $(f, g) \in F \times G$. On posera à nouveau $f = au + bv$.

En évaluant en 0, il vient $h(0) = a$; après dérivation et évaluation en 0, nous obtenons $h'(0) = au'(0) + bv'(0)$

soit aussi $h'(0) = -\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}b$ d'où $b = \frac{2}{\sqrt{3}}(h'(0) + \frac{h(0)}{2})$.

On pose alors, h étant toujours donné, $f = h(0)u + \frac{2}{\sqrt{3}}(h'(0) + \frac{h(0)}{2})v$ et $g = h - f$.

On a successivement :

i) $h = f + g$,

ii) $f \in F$,

iii) $g \in E$ (car différence de telles fonctions) et $g(0) = h(0) - f(0) = h(0) - h(0) = 0$ puis $g'(0) = h'(0) - f'(0) = h'(0) - (-\frac{h(0)}{2} + h'(0) + \frac{h(0)}{2}) = 0$ (OUF !); donc $g \in G$.

Bilan : $\boxed{E = F \oplus G}$ ■

Exercice 5 (Analyse)

Dans cet exercice, on utilisera les notations suivantes:

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ désigne le \mathbb{R} espace vectoriel des suites à termes réels.

E désigne le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites (u_n) convergentes telles que :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall k \geq N, u_k \neq \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$$

A toute suite (u_n) appartenant à E de limite égale à L , on associe la suite (u_n^c) définie à partir d'un certain

$$\text{rang par : } u_n^c = \left\lfloor \frac{u_{n+1} - L}{u_n - L} \right\rfloor.$$

E^c désigne l'ensemble des éléments (u_n) de E tels que (u_n^c) soit convergente.

Enfin si (u_n) appartient à E^c , en notant L^c la limite de (u_n^c) , on dit que la vitesse de convergence de la suite (u_n) (vers sa limite) est :

- lente si $L^c = 1$,
- géométrique de rapport L^c si $L^c \in]0, 1[$ et
- rapide si $L^c = 0$.

1) Montrer que l'ensemble E^c est non vide.

2) L'ensemble E^c est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

3) Montrer que E^c est strictement inclus dans E .

4) Soit (u_n) appartenant à E^c . Vérifier que $L^c \in [0, 1]$.

5) Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $q \in]0, 1[$, établir que les suites $\left(\frac{1}{(n+1)^k}\right)_n$, $(n^k q^n)_n$ et $\left(\frac{1}{n!}\right)_n$ sont dans E^c et préciser leur vitesse de convergence.

6) On pose, pour tout entier naturel n , $v_n = (1 + \frac{1}{2^n})^{2^n}$.

a) Prouver qu'au voisinage de $+\infty$ (i.e si $n \rightarrow +\infty$) : $v_n = e - \frac{e}{2^{n+1}} + o(\frac{1}{2^n})$.

b) En déduire que (v_n) est un élément de E^c dont on donnera la vitesse de convergence.

Solution :

1) La suite géométrique (2^{-n}) appartient à E^c ■

2) Non, puisque le vecteur nul de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ne peut y appartenir (puisqu'elle stationne sur sa limite) ■

3) Considérons la suite (u_n) dont le terme général est défini $u_n = \begin{cases} 2^{-n} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3^{-n} & \text{sinon} \end{cases}$; cette suite converge

bien vers 0 et aucun de ses termes n'est nul; c'est donc bien un élément de E .

Mais $(u_{2n-1}^c) = \frac{3^{2n-1}}{2^{2n}}$ diverge vers ∞ , ce qui souligne l'inclusion stricte voulue ■

4) Traitée le matin même avec la règle de d'Alembert pour les séries à termes strictement positifs ■

5) Les trois suites convergent vers 0 et sont à termes strictement positifs donc dans E .

On vérifie aisément que leur vitesse de convergence est (respectivement) lente, géométrique et rapide ■

6) a) Pour $n \rightarrow +\infty$, $v_n = \exp(2^n \ln(1 + 2^{-n})) = \exp(2^n(2^{-n} - 2^{-2n+1} + o((2^{-2n+1}))),$ avec utilisation du DL(0) à l'ordre deux de $\ln(1 + u)$.

On a donc bien, dans le même cadre, $v_n = e(\exp(-2^{-n-1} + o(2^{-n-1}))) = e - \frac{e}{2^{n+1}} + o(\frac{1}{2^n})$, avec un DL1(0)

de l'exponentielle ■

b) La question précédente donne immédiatement $v_n^c \sim \frac{1}{2}$ donc que la vitesse de convergence est géométrique ■

Exercice 6 (Analyse)

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle telle que : $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, u_{m+n} \geq u_m + u_n$.

On suppose que l'ensemble $\left\{ \frac{u_n}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ est majoré et on note s sa borne supérieure.

1) Soient m, q, r des éléments de \mathbb{N} . On note $n = mq + r$. Comparer les deux nombres réels u_n et $qu_m + u_r$ et montrer que $u_n - ns \geq q(u_m - ms) + u_r - rs$.

2) On fixe m dans \mathbb{N}^* et ε dans \mathbb{R}^{+*} . En utilisant la division euclidienne de n par m , montrer qu'il existe un entier N tel que pour tout $n > N$,

$$\frac{u_n}{n} \geq \frac{u_m}{m} - \varepsilon$$

3) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = s$.

Solution : 1) On a donc (par propriété de notre suite) $u_{qm} \geq q(u_m)$ donc aussi que $u_{qm+r} \geq q(u_m) + u_r$, ce qui répond à la première partie de cette question.

Quant à la seconde, elle est évidente puisqu'équivalente à l'inégalité précédente ■

2) En écrivant l'inégalité précédente (afin de manipuler des termes positifs) : $-u_n + ns \leq q(-u_m + ms) - u_r + rs$ puis en divisant par n chaque membre, il vient $s - \frac{u_n}{n} \leq \frac{q}{qm+r}(ms - u_m) + \frac{rs - u_r}{n} \leq \frac{ms - u_m}{m} + \frac{rs - u_r}{n}$

En prenant pour r le reste de la division de n par m , u_r ne prend qu'un nombre fini de valeurs et la suite $\left(\frac{rs - u_r}{n} \right)_n$ converge vers 0, ainsi il existe un entier N tel que $\forall n \geq N$ on ait $s - \frac{u_n}{n} \leq s - \frac{u_m}{m} + \varepsilon$; ce qui

est après réorganisation immédiate : $\frac{u_n}{n} \geq \frac{u_m}{m} - \varepsilon$ ■

3) Donnons nous à nouveau $\varepsilon > 0$, comme $s - \varepsilon < s$, ce n'est plus un majorant de l'ensemble $\left\{ \frac{u_n}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ (

On rappelle que la borne supérieure d'un ensemble (lorsqu'elle existe) est le plus petit des majorants de cet ensemble); don il existe un entier m tel que $\frac{u_m}{m} > s - \varepsilon$ donc en utilisant la question précédente, nous avons

APCR : $\frac{u_n}{n} \geq s - 2\varepsilon$ et (par définition de s) $s \geq \frac{u_n}{n}$, ce pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

En résumé $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq N, \left| \frac{u_n}{n} - s \right| \leq 2\varepsilon$, ce qui est la définition de la convergence vers s de la suite $\left(\frac{u_n}{n} \right)_n$ ■

Exercice 7 (Analyse)

1) Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et, pour tout entier naturel n : $I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 e^{rt}(t(1-t))^n dt$.

On suppose qu'il existe deux entiers naturels non nuls p et q tels que $e^r = \frac{p}{q}$.

a) A l'aide d'intégrations par parties répétées, montrer qu'il existe un entier naturel non nul A tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n I_n \in \mathbb{N}^*$.

b) Prouver que la suite $(A^n I_n)$ converge vers 0. En déduire que e^r est un irrationnel.

2) Etablir que si $s \in \mathbb{Q}^*$, e^s est un irrationnel.

3) $\ln(2)$ est-il rationnel?

Solution : 1)a) On pose $P = X^n(1-X)^n$, c'est un polynôme de degré $2n$ donc sa dérivée d'ordre $2n+1$ est nulle; on pose aussi $g(t) = e^{rt}$, pour tout réel t . On procède à $2n$ IPP successives en dérivant systématiquement P et en primitivant systématiquement l'exponentielle; ce qui donne :

$$n! I_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} [P^{(k)}(t)r^{-k}g(t)]_0^1 + 0.$$

Mais 0 et 1 sont des racines d'ordre n de P donc $P^{(k)}$ s'annule en ces points pour $0 \leq k \leq n-1$ donc on a :

$$n! I_n = \sum_{k=n}^{2n} (-1)^{k-1} [P^{(k)}(t)r^{-k}g(t)]_0^1.$$

La formule de Leibniz (donnant la dérivée d'ordre quelconque d'un produit) et le fait que $((1-X)^n)^{(s)} = (-1)^s s! \binom{n}{s} (1-X)^{n-s}$ permet de dire que $P^{(k)}(0) = n!(k-n)!(-1)^{k-n} \binom{n}{k-n}$, ce pour tout $k \in \llbracket n, 2n \rrbracket$,

ce qui montre que tous ces nombres sont des entiers divisibles par $n!$; on prouve de même que cela vaut aussi pour les $P^{(k)}(1)$.

Il en résulte (après simplification par $n!$) que l'on peut écrire $I_n = r^{-2n}(U_n + V_n g(1))$, où U_n et V_n sont

des entiers relatifs. Comme $g(1) = e^r = \frac{p}{q}$, il en ressort que $qr^{2n}I_n$ est un entier relatif; la positivité de l'intégrale I_n et le fait que son intégrande soit continue, positive et non identiquement nulle assurent que $qr^{2n}I_n \in \mathbb{N}^*$. Ce qui donne le résultat en prenant pour $A = qr^2$ mais pour $n \geq 1$ seulement mais cela suffira ■

b) Pour tout n (par majoration élémentaire de l'intégrande par $g(1)$), $0 \leq A^n I_n \leq g(1) \frac{A^n}{n!}$; la croissance comparée des suites usuelles et le théorème des gendarmes impliquent bien $A^n I_n \rightarrow 0$.

Il s'agit donc d'une suite d'entiers naturels convergeant vers 0, ce qui impose à cette suite de stationner sur 0. CONTRADICTION avec a).

Nous avons prouvé, par l'absurde, que $e^r \notin \mathbb{Q}$ si $r \in \mathbb{N}^*$ ■

2) Supposons que ce soit le cas et posons $s = \frac{m}{h}$, où $(h, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}^*$ alors $(e^s)^h = e^m$ serait un rationnel; ce qui entre en conflit avec 1)b) si $m \in \mathbb{N}^*$. Si $m < 0$, on aboutit au même type de contradiction puisque e^{-m} serait aussi un rationnel. Ainsi $e^s \notin \mathbb{Q}$ si $s \in \mathbb{Q}^*$ ■

3) Si $\ln(2)$ était un rationnel, comme $\ln(2) \neq 0$, nous aurions (cf Q2) $e^{\ln(2)} = 2 \notin \mathbb{Q}$ donc... ■