TD4 : Séries I (Corrigé partiel)

PCSTP est l'abréviation de par principe de comparaison des séries à termes positifs.

Exercice 1 : (Nature de séries)
Déterminer la nature des séries de terme général suivant :
a) a^{-n^b}, $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$.
b) $\dfrac{2^n + n^3}{3^n + \ln(n+3)}$.
c) $\arctan(n^2 + n + 2) - \arctan(n^2 + 1)$.
d) $(\dfrac{n}{n+1})^{n^2}$.
e) $e^{-\sqrt{\ln(n)}}$.
f) $\tan(\dfrac{1}{\sqrt{n}}) - \dfrac{n+1}{n^{3/2}}$.
g) $n^\alpha q^n$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $q \in]0, 1[$.
h) $\dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$.
i) $\arccos(1 - \dfrac{1}{n})$.
Solution : le terme général de chacune de ces séries est noté u_n.
a) On va commencer par écarter les cas de divergence grossière.
Posant $v_n = \ln(u_n)$, nous allons caractériser les paramètres pour lesquels $v_n \to -\infty$.
Comme $v_n = -n^b(\ln(a))$, on a $v_n \to\neq -\infty$ si $a \leq 1$ ou $b \leq 0$.
Si $a > 1$ et $b > 0$, il n'y a pas DVG.
Pour ce cas $\ln(n^2 u_n) = 2\ln(n) - n^b(\ln(a)) \to -\infty$ donc $n^2 u_n \to 0$, ce qui par PCSTP, donne la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ dans ce cas et seulement dans ce cas■
b) $u_n \sim (2/3)^n$ donc par PCSTP à une série géométrique convergente, il y a convergence■
d) $n^2 u_n = n^2 exp(-n^2 \ln(1 + 1/n)) = n^2 exp(-n + O(1))$, avec DL d'ordre 2 de $\ln(1 + u)$; ainsi $n^2 exp(-n + O(1)) \to 0$, par croissance comparée donc la règle du n^2 donne la convergence de $\sum_{n\geq 0} u_n$■

e) Pour $n \geq 3$, $\ln(n) \geq 1$ donc $\ln(n) \geq \sqrt{\ln(n)}$ d'où $u_n \geq e^{-\ln(n)} = \dfrac{1}{n}$. PCSTP, $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge puisque la série harmonique diverge■
f) On a, au voisinage de 0, $\tan(x) - x = \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$ donc $-u_n \sim \dfrac{2}{3n^{3/2}}$ d'où la convergence de notre série■
g) Traitée en cours avec la règle de d'Alembert■
h) On voit très vite que $nu_n = exp(\dfrac{-\ln(n)}{n}) \to 1$ d'où divergence par PCSTP■
i) La fonction arccos est à valeurs positives donc on dispose d'une STP et $u_n \to \arccos(1) = 0$ et $\cos(u_n) = 1 - \dfrac{1}{n}$ donc $\dfrac{1}{n} = 1 - \cos(u_n)$.
Comme $u_n \to 0$, $1 - \cos(u_n) \sim \dfrac{u_n^2}{2}$, soit, par positivité de notre série, $u_n \sim \sqrt{\dfrac{2}{n}}$ puis PCSTP il vient que notre série diverge■
Exercice 2 : (Constante d'Euler)
1) Montrer que la suite $(\sum_{k=2n}^{5n} \dfrac{1}{k})$ converge vers une limite à préciser.
2) Vérifier que la série de terme général $\dfrac{1}{2n(2n+1)}$ converge et calculer sa somme.
Solution :
1) On pose $u_n = \sum_{k=2n}^{5n} \dfrac{1}{k})$, pour tout $n \geq 1$; avec les notations du cours $u_n = H_{5n} - H_{2n} + \dfrac{1}{2n}$.
D'après votre cours : $u_n = \ln(5n) + \gamma + v_{5n} - \ln(2n) + \gamma - v_{2n} + \dfrac{1}{2n}$, où (v_n) est une suite convergeant vers

0.
D'où $u_n \to \ln(5/2)$■
Exercice 3 : (D'Alembert versus Stirling)
On se donne un réel strictement positif β et on pose, pour tout n, $u_n = \dfrac{1}{2^n}\dbinom{3n}{n}\beta^{3n}$.
Nature suivant β de la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$?
Exercice 4 : (Comparaison)
On se donne une série à termes positifs $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$. Que dire de la nature de $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{u_n}{1+u_n}$ suivant celle de $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$?.
(On pourra distinguer les cas $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ ne diverge pas grossièrement et $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ diverge grossièrement).
Solution :
Si $u_n \to 0$ alors $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n} \sim u_n$ et ainsi les séries en jeu sont de même nature.
Dans le cas contraire et en supposant que $v_n \to 0$, il vient, puisque $v_n(1+u_n) = u_n$ soit $u_n = \dfrac{v_n}{1-v_n}$ au moins APCR, que (u_n) converge vers 0; ce qui est contradictoire. En résumé nos séries sont toujours de même nature■
Exercice 5 : (Lien suite - série)
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in]0,1[$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$, pour tout n.
Nature de la série de terme général u_n^2?
Solution :
On vérifie simplement que la suite est décroissante (par sa définition) et à termes positifs (par récurrence) donc elle converge.
Par conséquent, par le lien suite-série, la série de terme général u_n^2 converge■
Exercice 6 : (Mines oral)
a) Discuter suivant les réels a, b, c de la nature de la série de terme général $a\ln(n+2) + b\ln(n+1) + c\ln(n)$.
b) Dans le cas de convergence, déterminer la somme de cette série.
Exercice 7 : (Travail sur les restes)
Par considération d'aires donner un équivalent de R_n le reste d'ordre n de la série de Riemann $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ dans le cas où, bien sûr, celle-ci converge.
Nature de la série de terme général R_n?
Exercice 8 : (Sommation des équivalents)
1)On se donne deux séries à termes strictement positifs $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ telles que la première diverge et que l'on ait $u_n \sim v_n$ si $n \to +\infty$.
On note (S_n) (resp. (T_n)) la suite des sommes partielles de la première (resp. seconde) série.
Démontrer $S_n - T_n = o(T_n)$ au voisinage de $+\infty$ et donc que $S_n \sim T_n$.
2) Le résultat précédent est-il encore vrai si $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge?
3) En déduire une démonstration du théorème de Cesaro.
4) Donner un équivalent, pour $n \to +\infty$ de $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{3k+2}{k^2+k+1}$.