TD5 : Séries II (Corrigé)

Exercice 1 : (Un calcul de somme)
1) On note tanh la fonction tangente hyperbolique.
a) Domaine de définition et tracé rapide du graphe.
b) Déterminer le $DL_3(0)$de tanh.
On se donne un réel x non nul et on pose $u_n = \ln(1+\tanh^2(\frac{x}{2^n}))$, ce pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) Etablir que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
On note (S_n) la suite de ses sommes partielles.
3) a) Vérifier que, pour tout réel t : $\cosh^2(t)+\sinh^2(t) = \cosh(2t)$ et que $2\sinh(t)\cosh(t) = \sinh(2t)$.
On pose $P_n = \prod_{k=0}^{n} \cosh(\frac{x}{2^k})$.
b) Montrer que $\sinh(\frac{x}{2^n})P_n = \frac{\sinh(2x)}{2^{n+1}}$.
c) En utiisant a), b) et un télescopage, simplifier S_n et déterminer la limite de cette suite.
Solution:
On supposera $x \geq 0$(le passage de x à $-x$ devant donner le même résultat) en 3)c).
1) et 2) corrigées en classe ■
3)a) Petite vérification sans difficulté ■
b) Simple récurrence avec la seconde formule de 3)a).
On posera $a_n = \frac{x}{2^n}$, ce pour tout n.
c) Pour tout n, $u_n = \ln(\frac{\cosh^2(a_n)+\sinh^2(a_n)}{\cosh^2(a_n)}) = \ln(\frac{\cosh(2a_n)}{\cosh^2(a_n)}) = \ln(\cosh(a_{n-1}) - 2\ln(\cosh(a_n)$.
Il en résulte que $S_n = \ln(\cosh(2x)) - \ln(P_{n-1}) - 2\ln(\cosh(a_n)) = \ln(\cosh(2x)) - \ln(\sinh(2x)) - \ln(2^n \sinh(a_{n-1}))$, ce avec 3)b.
De plus $a_{n-1} \to 0$ donc $\sinh(a_{n-1}) \sim a_{n-1}$ et $2^n \sinh(a_{n-1}) \sim 2^n \frac{x}{2^{n-1}} = 2x$
Par conséquent, en composant les limites et non les équivalents, nous obtenons $S_n \to \ln(\coth(2x)) - \ln(2x) = \ln(\frac{\coth(2x)}{2x})$■

Exercice 2 : (Etude d'une série)
Pour tout entier n, on pose $u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.
On se propose de déterminer la nature de $\sum_{n\geq 0} u_n$.
1) Prouver que $\sqrt{n^2+1} = n(1+\frac{1}{2n^2}+O(\frac{1}{n^4})$.
2) En déduire que $u_n = (-1)^n \sin(\frac{\pi}{2n}+O(\frac{1}{n^3}))$.
3) Vérifier que notre série est alternée. Est-elle absolument convergente?
4) Montrer que $u_n = (-1)^n\frac{\pi}{2n}+O(\frac{1}{n^3})$.
Conclure en observant que si le terme général d'une série est un $O(\frac{1}{n^3})$, celle-ci est ACV.
Solution:
Tout ce qui suit vaut pour $n \to +\infty$.
1) $\sqrt{n^2+1} = n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} = n(1+\frac{1}{2n^2}+O(\frac{1}{n^4})$, en utilisant le fait suivant : $\sqrt{(1+x)} = 1+\frac{x}{2}+O(x^2)$■
2) En injectant ce qui précède : $u_n = \sin(\pi(n(1+\frac{1}{2n^2}+O(\frac{1}{n^4}))) = (-1)^n\sin(\frac{\pi}{2n}+O(\frac{1}{n^3}))$■
3) La question précédente montre que (APCR) u_n est du signe de $(-1)^n$ donc que notre série est alternée APCR.
De plus $|u_n| \sim \frac{\pi}{2n}$, il n'y a pas de convergence absolue■

4) On sait que pour $x \to 0$ $\sin(x) = x + O(x^3)$ d'où ce développement et, grâce au cours, on en déduit que notre série est convergente$\blacksquare$