Chapitre 1.2 : Divisibilité des polynômes

1 Division euclidienne

Théorème 1 (Division euclidienne de polynômes (admis)).

Pour tout polynôme P de degré n, tout polynôme A non nul. Il existe un unique couple de polynômes (Q,R) tel que $P = AQ + R$ avec $\underline{\deg R < \deg A}$.
Q est appelé quotient de la division et R le reste de la division de P par A.

■ **Exemple 1:**
$X^2 - 3X + 5 = (X+1)(X-4) + 1$

Remarque 1.

Si $R = 0$, alors on dit que A divise P ou que P est un multiple de A.

▶ Exercice 1

Effectuer la division posée de $P(X) = 4x^5 + 3x^3 - X^2 + 5X - 1$ par $X - 3$.
En déduire une valeur de $P(3)$.

▶ Exercice 2 **Évaluation d'un polynome**

Soit $P(X) = 5X^4 + X^5 - 4X^3 + 5X^2 - X - 7$
Calculer $P(2+\sqrt{3})$

2 Méthode de division par le tableau de Hörner

■ **Exemple 2:**

On veut diviser $P(X) = 4x^5 + 3x^3 - X^2 + 5X - 1$ par $X - 3$:

- On crée un tableau avec les coefficients de P.
- On applique le schéma de Hörner avec ce tableau
- Le nombre qu'on obtient en bas à droite est la valeur $P(3)$
- Les nombres dans la dernière ligne sont les coefficients du quotient.

	4	0	3	-1	5	-1
3		3×4	3×12	3×39		
	4	**12**	**39**	$\cdots$	$\cdots$	

▶ Exercice 3

Effectuer les divisions polynomiales suivantes :

1. x^3+4x^2+12 par $x-4$ 140
2. $2x^3-3x^2-5x-5$ par $x-2$ -11
3. x^3-x^2-4x+4 par $x-2$ 0. Quelle est la conséquence de ceci ?

▶ Exercice 4

Résoudre l'équation $x^3-2x^2-5x+6=0$ en utilisant une racine évidente.

▶ Exercice 5

Même question avec $x^3-6x^2-9x+14=0$

▶ Exercice 6 **Algorithme de Hörner**

Cette méthode permet de calculer $P(\alpha)$ avec un nombre d'opérations réduit par rapport à la méthode classique. Dans le cas où α est une racine de P, les coefficients obtenus permettent de factoriser P.

1. On suppose que P est un polynôme de degré 3 et on note $P(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$, où $a_0,\cdots,a_3$ sont des réels et $a_3\neq0$.
2. Soit α un réel quelconque.
   (a) Prouver que $P(\alpha)=a_0+\alpha\big(a_1+\alpha(a_2+\alpha a_3)\big)$
   (b) Compter le nombre d'opérations nécessaires pour calculer $P(\alpha)$ avec cette méthode. Comparer avec le nombre d'opérations nécessaires avec l'expression $P(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$.
3. Soit α une racine de P. Montrer alors que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $P(x)=(x-\alpha)\big(a_3x^2+(a_2+\alpha a_3)x+a_1+\alpha(a_2+\alpha a_3)\big)$.

On appelle donc *coefficients de Hörner* les nombres a_3, $a_2+\alpha a_3$, $a_1+\alpha(a_2+\alpha a_3)$