TD4 : Fin de Corrigé

(Exercice 7)
Par considération d'aires donner un équivalent de R_n le reste d'ordre n de la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ dans le cas où, bien sûr, celle-ci converge.
Nature de la série de terme général R_n?
Solution : On pose, pour $x \geq 1$, $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, ce pour $\alpha > 1$ et $g(x) = \frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}$
Pour tout $k \geq 2$, par simple considération d'aire résultant de la décroissance de f, il vient $\int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(x)dx$.
Donc en sommant cet encadrement pour $k = n+1, \ldots.., k = n+p$, $n \geq 1$ et p qui va tendre vers $+\infty$, nous avons :
(1) $\int_{n+1}^{n+p+1} f(x)dx \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} f(k) \leq \int_n^{n+p} f(x)dx$. Un simple calcul donne $\int_{n+1}^{n+p+1} f(x)dx = g(n+1) - g(n+p+1) \to g(n+1)$ si $p \to +\infty$ et
$\int_n^{n+p} f(x)dx = g(n) - g(n+p) \to g(n)$ si $p \to +\infty$.
Puis, par conservation des inégalités à la limite dans (1), nous obtenons $g(n+1) \leq R_n \leq g(n)$ puis en divisant par $g(n)$ (et par théorème des gendarmes) : $R_n \underset{n\to\infty}{\sim} g(n) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.
Il en résulte, par comparaison des STP, que $\sum_{n\geq 0} R_n$ converge ssi $\alpha > 2$■

(Exercice 8)
1)On se donne deux séries à termes strictement positifs $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ telles que la première diverge et que l'on ait $u_n \sim v_n$ si $n \to +\infty$.
On note (S_n) (resp. (T_n)) la suite des sommes partielles de la première (resp. seconde) série.
Démontrer $S_n - T_n = o(T_n)$ au voisinage de $+\infty$ et donc que $S_n \sim T_n$.
2) Le résultat précédent est-il encore vrai si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge?
3) En déduire une démonstration du théorème de Cesaro.
4) Donner un équivalent, pour $n \to +\infty$ de $\sum_{k=0}^{n} \frac{3k+2}{k^2+k+1}$.
Solution : 1) On pose $u_n - v_n = t_n v_n$, où $t_n \to 0$ et on se donne $\epsilon > 0$ ainsi que $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, |t_n| \leq \epsilon$.
On posera $A = \sum_{k=0}^{N} |u_k - v_k|$ donc par inégalité triangulaire et $n \geq N$ il vient :
$\frac{|S_n - T_n|}{T_n} \leq \frac{A}{T_n} + \epsilon \leq 2\epsilon$, ce pour n assez grand puisque $T_n \to \infty$ (en effet la STP $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge) d'où $S_n \sim T_n$■
2) Non, prendre par exemple, $u_n = 2^{-n}$ et $v_n = u_n + 3^{-n}$; on a bien $u_n \sim v_n$ si $n \to +\infty$ alors que $S_n \to 2$ et $T_n \to 2 + \frac{3}{2} \neq 2$■
3) On se place dans le cas où $u_n \to L > 0$, en utilisant le résultat précédent avec $v_n = L$, nous avons $S_n \sim (n+1)L$, ce qui est le théorème de Cesaro. Le cas $L < 0$ se traite en passant aux opposés.
Si $L = 0$, appliquer le premier cas à $a_n = 1 - u_n$ et $b_n = 1$ pour conclure■
4) Avec 1) et le cours $\sum_{k=0}^{n} \frac{3k+2}{k^2+k+1} \sim 3H_n \sim 3\ln(n)$■