TD 6 : Corrigé

Exercice 1 : (Exponentielle, cf cours)
On se donne un complexe z.
1) Etablir, par récurrence, que :
$\forall n \in \mathbb{N}, e^z = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} + z^{n+1}\int_0^1 \frac{e^{zt}(1-t)^n}{n!}dt$
On pose alors $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$ et $I_n = z^{n+1}\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{zt}(1-t)^n}{n!}dt$
2) Prouver que (I_n) converge vers 0, en déduire que $e^z = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$.
Exercice 2 : (Navale)
Nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^n \ln(1+\frac{1}{n})$, de $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\ln(1+\frac{(-1)^n}{n})$ (ind : DL)
Exercice 3 : (Type CCP)
Que dire d'une série de terme général:$\dfrac{(-1)^n}{n^{1/7}} + \dfrac{2}{n^{2/5}} + o\left(\dfrac{1}{n^{5/2}}\right)$?
Exercice 4 : (CCP Banque)
Pour x, α réels, étudier la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n e^{-nx}}{n^\alpha}$.
Solution : a) Si $x<0$ ou $x=0$ et $\alpha \leq 0$, il y a DVG.
b) Si $x=0$ et $\alpha>0$ semi-convergence notoire.
c) Sinon (D'alembert) ACV■
Exercice 5 : (Etude d'une série semi-convergente, sommation par paquet)
Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \dfrac{\cos(2n\pi/3))}{n}$ et $v_n = u_{3n-2} + u_{3n-1} + u_{3n}$.
0) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ est-elle absolument convergente?
1) Prouver que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} v_n$ converge.
On note, pour $n \geq 1, S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.
2) Déduire de 1) que $(S_{3n})_{n\geq 1}$ converge. Prouver que $(S_{3n+i})_{n\geq 0}$ convergent aussi vers la même limite, notée L, que $(S_{3n})_{n\geq 1}$. Que peut-on en déduire?
3) En revenant à la définition de u_n et à l'aide de télescopage, exprimer S_{3n} en fonction des sommes partielles de la série harmonique. Déterminer alors L.
Solution : 0) On a $u_n = \dfrac{-1}{2n}$ si n n'est pas un multiple de 3 et $\dfrac{1}{n}$ sinon. Ainsi $\forall n \geq 1$, $|u_n| \geq \dfrac{1}{2n}$, ce qui prouve, par comparaison des STP, que $\displaystyle\sum_{n\geq 1}|u_n|$ diverge et que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ ne converge pas absolument■
1) Pour $n \geq 1$, $u_n =$ '$\dfrac{-9n+4}{6n(3n-1)(3n-2)} \sim \dfrac{-9n}{54n^3} = -\dfrac{1}{6n^2}$; il en découle l'absolue convergence donc la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} v_n$■
2) S_{3n} étant la somme partielle de la série convergente étudiée en 1), la suite $(S_3 n)$ converge bien; les deux autres suites ont le même comportement et la même limite puisque $u_n \to 0$.
On en déduit par une généralisation assez intuitive du contexte suite extraite d'indices pairs et impairs que la suite (S_n) converge vers cette limite commune■
3) On obtient, pour $n \geq 1$: $S_{3n} = \dfrac{H_n}{3} - \dfrac{1}{2}(H_{3n} - \dfrac{H_n}{3}) = \dfrac{1}{2}(H_n - H_{3n})$.
Comme on doit enfin savoir que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$, nous avons $S_{3n} = -\dfrac{1}{2}\ln(3) + o(1)$.
Bilan $\boxed{L = -\frac{1}{2}\ln(3)}$■

Exercice 6 : (Produit de Cauchy, reprise exemple du cours)
On pose, pour tout $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et on prend $u_0 = 0$.
Montrer que le produit de Cauchy de cette série par elle même (déterminé en cours) est une série grossièrement divergente en minorant la valeur absolue de son terme général.

Solution : Notons v_n le terme général de ce produit de Cauchy; nous avons obtenu $v_n = (-1)^n \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$, pour tout n. On a donc, dans le même contexte, $|u_n| \geq \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - 1/n$ (en minorant chaque terme de la somme par $1/n$); cette minoration interdit bien à la suite (u_n) de converger vers 0■

Exercice 7 : (Somme d'une série)
Pour tout n, $u_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^{n-p}}{(p+1)(p+2)(n-p)!}$.
1) Prouver que $\sum u_n$ converge absolument.
2) En déterminer la somme.

Solution : On pose $a_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ et $b_n = \dfrac{(-1)^n}{n!}$, pour tout n.
Ces deux séries sont notoirement absolument convergentes et de somme respective 1 et e^{-1}.
Dès lors puisque $\sum u_n$ est le produit de Cauchy de $\sum a_n$ et $\sum b_n$, elle est aussi absolument convergente et sa somme est le produit $1 \times e^{-1} = e^{-1}$■

Exercice 8 : (X-ENS, Oral)
Nature de la série de terme général $\sin(2\pi n!e)$?

Exercice 9 : (X-ENS, Oral)
Nature de la série de terme général $\dfrac{\sin^2(n)}{n}$?