TD 7 : Corrigé partiel

Exercice 1 : (Sans calcul)
a) Calculer $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 7 \\ -3 & 0 & 1 \\ -7 & -1 & 0 \end{vmatrix}$. b) Sachant que 204, 527 et 255 sont divisibles par 17, démontrer que $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ est un entier divisible par 17.

Exercice 2 : (Déterminant tridiagonal : CCINP)
On définit pour $n \geq 1$ la matrice $A_n = (a_{i,j})$ de $M_n(\mathbb{R})$ par $a_{i,i} = 2$ et $a_{i+1,i} = 1$, $a_{i-1,i} = 1$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$pour lequel ces égalités ont du sens; les autres coefficients étant nuls. On note Δ_n le déterminant de cette matrice.
a) Calculer Δ_1 et Δ_2.
b) On suppose $n \geq 3$, en développant suivant la première colonne trouver une relation entre Δ_n, Δ_{n-1} et Δ_{n-2} . En déduire une expression de Δ_n en fonction de n.
c) A_n est-elle inversible? Si oui en déterminer la première colonne.

Exercice 3 : (Tout concours)
Montrer que toute matrice carrée est somme de deux matrices inversibles.
Solution : Notons $A = (a_{i,j})$ la matrice à ainsi décomposer. Définissons $M = (m_{i,j})$ comme la matrice triangulaire inférieure telle que $m_{i,j} = a_{i,j}$ si $i > j$ et $m_{i,i} = \begin{cases} \dfrac{a_{i,i}}{2} & \text{si } a_{i,i} \neq 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$. De même on définit $P = (p_{i,j})$ comme la matrice triangulaire supérieure telle que $p_{i,j} = a_{i,j}$ si $i < j$ et $p_{i,i} = \begin{cases} \dfrac{a_{i,i}}{2} & \text{si } a_{i,i} \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$.
On constate aisément que $M + N = A$ et que M, N sont bien inversibles car triangulaires avec des éléments diagonaux tous non nuls■

Exercice 4 : (Contre-exemple)
i) A-t-on $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$?
ii) A-t-on $tr(AB) = tr(A)tr(B)$?
Solution : i) Non, prendre $A = -BI_2$.
ii) Non plus, prendre $A = B = I_2$■

Exercice 5 : (Classique donc à chercher)
Que vaut $\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & (2) & \\ & & \ddots & \\ & (2) & & \ddots & \\ & & & & n \end{vmatrix}$?

Exercice 6 : (Mines MP 2009)
Déterminants de Cauchy
On considère un entier $n > 0$ et deux suites finies $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ et $(b_k)_{1\leq k\leq n}$ de réels telles que $a_k + b_k \neq 0$ pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Pour tout entier m tel que $0 < m \leq n$, le *déterminant de Cauchy* d'ordre m est défini par :

$$D_m = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1 + b_1} & \dfrac{1}{a_1 + b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_1 + b_m} \\ \dfrac{1}{a_2 + b_1} & \dfrac{1}{a_2 + b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_2 + b_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{1}{a_m + b_1} & \dfrac{1}{a_m + b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_m + b_m} \end{vmatrix}.$$

On définit la fraction rationnelle :

$$R(X) = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (X - a_k)}{\prod_{k=1}^{n} (X + b_k)}.$$

1. Montrer que si $R(X)$ est de la forme $R(X)=\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{X+b_k}$, alors
$$A_nD_n = R(a_n)D_{n-1}$$
On pourra pour cela considérer le déterminant obtenu à partir de D_n en remplaçant la dernière colonne par
$$\begin{pmatrix} R(a_1)\\ R(a_2)\\ \vdots \\ R(a_n)\end{pmatrix}.$$

2. En déduire que
$$D_n=\frac{\prod\limits_{1\leq i<j<\leq n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod\limits_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}(a_i+b_j)}.$$

Exercice 7 : (ENS)
On note ϕ l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ qui à $M\in M_n(\mathbb{R})$ associe sa transposée.
Déterminer déterminant et trace de ϕ.
Solution : On juxtapose une base de $S_n(\mathbb{R})$ et de $A_n(\mathbb{R})$, ce qui donne une base de $M_n(\mathbb{R})$ (puisque les deux sev prcédents dont supplémentaires dans $M_n(\mathbb{R})$). Dans cette base la matrice de ϕ est $diag(1,.....,1,-1,....,-1)$ avec $\frac{n(n-1)}{2}$ apparitions de -1.
De ceci on déduit que $\det(\phi)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ et $tr(\phi)=\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n-1)}{2}=n$■
Exercice 8 : (Similitude et nilpotence)
Soit $N\in M_n(\mathbb{K})$ nilpotente et non nulle. Prouver par l'absurde que I_n et I_n+N ne sont pas semblables.
Solution : En les supposant semblables, on pourrait trouver $P\in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $I_n+N=P^{-1}I_nP=I_n$ donc N serait nulle..■
Exercice 9 : (Une matrice anticirculante)
Soient a,b,c,d des complexes. Calculer $\begin{vmatrix} a & b & c & d\\ -d & a & b & c\\ -c & -d & a & b\\ -b & -c & -d & a\end{vmatrix}$.
Exercice 10 : (Géométrie?)
x,y,z sont les mesures des angles d'un triangle. Valeur de $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ \cos(x) & \cos(y) & \cos(z)\\ \tan(\frac{x}{2}) & \tan(\frac{y}{2}) & \tan(\frac{z}{2})\end{vmatrix}$?
Exercice 11 : (Hyperplan de $M_2(\mathbb{K})$)
Soit H un tel hyperplan.
a) Contient-il une matrice symétrique? antisymétrique?
b) Contient-il une matrice nilpotente?
c) Contient-il une matrice inversible?
Solution : Oui, la matrice nulle pour a) et b).
■
Exercice 12 : (X)
Soient $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$, $P=aX+b$ et $Q=cX+d$.
On définit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ par $f(X^k)=P^kQ^{n-k}$, ce pour $k\in[\![0,n]\!]$.
Déterminant et trace de f.
Exercice 13 : (Circulez ! Centrale PSI)
On désire calculer :
pour $(a_0,...,a_{n-1})\in\mathbb{C}^n$, $\det(A)$ où $A=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1}\\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0\end{pmatrix}$.

1) On note $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & (0) \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & (0) & & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, en calculant les puissances successives de cette matrice,vérifier que : $\boxed{A = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k.}$

On désigne par f l'endomorphisme canoniquement associé à J.
Pour, $0 \leq k \leq n-1$, posons $x_k = (1, v^k, v^{2k}, ..., v^{(n-1)k})$ où $v = \exp(\dfrac{2i\pi}{n})$.
2) Etablir (penser au déterminant de Vandermonde) que $(x_0, ..., x_{n-1})$ est une base de $\mathbb{C}^n$.
3) Déterminer la matrice dans $(x_0, ..., x_{n-1})$ de f; on la note D.
P désigne la matrice de passage de la base canonique à $(x_0, ..., x_{n-1})$.
4) Prouver que $A = P^{-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k \right) P$. En déduire $\det(A)$.