DS 2 (4 heures).

La rédaction, l'argumentation et la présentation matérielle entrent dans une part significative de la notation; vous devrez aussi respecter la terminologie et les règles d'usage en vigueur. Les exercices, problèmes sont indépendants. Les résultats numériques seront encadrés et simplifiés. Si vous êtes amené à repérer ce qui peut vous sembler une erreur d'énoncé, vous êtes prié de le signaler sur votre copie et devrez poursuivre votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous prendriez.

Calculatrices autorisées.

Les exercices sont de difficulté croissante. **Le premier d'entr'eux est OBLIGATOIRE et il convient de lui accorder tous vos égards. Toute réponse mitigée à cet exercice influera sur le jugement général de votre copie.**

Exercice 1 (Cours ou presque et questions indépendantes)
a) Donner la définition du produit de Cauchy de deux séries.
b) Donner un exemple de série semi-convergente.
c) Prouver de deux façons que la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n!}$ converge. Que vaut sa somme (elle sera notée S)?
Donner une valeur approchée rationnelle de S à 10^{-2} près?
(Toute réponse sans justification ne sera pas prise en compte)
d) On dispose d'une série de terme général v_n vérifiant : $v_n = \dfrac{(-1)^n \ln(n)}{n} + \dfrac{cos(n)}{n^{1,1}} + O(\dfrac{1}{n^{\ln 7}})$ pour $n \to \infty$.
Que pouvez-vous dire de la nature de la série $\sum v_n$?
e) Quelle est la valeur du déterminant de Vandermonde $V(1, -1, 2, -2)$?
f) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.
Vérifier que $X^3 - 1$ est un polynôme annulateur de A.
En déduire l'inverse de A ainsi que le spectre (réel) de A.
g) Quel est l'interpolant de Lagrange de la fonction valeur absolue en les trois points -1,0 et 1?
Solution :c) En tant que série exponentielle, cette série est ACV donc CV. On peut aussi lui appliquer le théorème de Leibniz puisqu'elle est alternée et répond à toutes les hypothèses de ce théorème.
S_n, la somme partielle d'ordre n de notre série alternée est une valeur approchée de $S = e^{-1}$ et l'erreur commise est en valeur absolue celle du reste d'ordre n. Cette dernière (Leibniz) est majorée par $|u_{n+1}| = \dfrac{1}{(n+1)!}$. Ainsi $S_4 = \dfrac{3}{8}$ est une valeur approchée rationnelle de S à 10^{-2} près.
d) Posons pour n assez grand $a_n = \dfrac{(-1)^n \ln(n)}{n}$,$b_n = \dfrac{cos(n)}{n^{1,1}}$ et $c_n = \dfrac{1}{n^{\ln 7}}$; $\sum a_n$ est convergente (par le théorème de Leibniz), quant aux séries $\sum b_n$ et $\sum c_n$, elles sont ACV. Par linéarité (et comparaison des séries ACV) des séries convergentes, $\sum v_n$ converge.
e) D'après votre cours (ou un autre d'ailleurs) ce déterminant vaut $(-1-1)(2-1)(-2-1)(2-(-1))(-2-(-1))(-2-2) = 72$
f) Un calcul immédiat donne en effet $A^3 = I_3$. Donc $AA^2 = I_3$ et $A \in GL_3(\mathbb{R})$ avec $A^{-1} = A^2$.
Le spectre réel de A est inclus dans l'ensemble des racines réelles de $X^3 - 1$. Ainsi ce spectre est-il ou vide ou réduit à 1. Comme le rang de $A - I_3$ est égal à $2 < 3$, 1 est effectivement vp de A donc $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{1\}$.
g) Il s'agit (cf cours) de l'unique polynôme de $\mathbb{R}[X]$ qui prend les mêmes valeurs en -1,0 et 1 que la valeur absolue. On voit tout de suite que le polynôme X^2 convient donc par unicité, c'est bien lui qui interpole la valeur absolue aux points mentionnés ■

Exercice 2 (EML Lyon 2022 MP,PC,PSI)
Dans tout l'exercice E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$.

ω désigne l'endomorphisme nul de E.
On rappelle que si f est une symétrie de E, alors $E = Ker(f - id_E) \oplus Ker(f + id_E)$.
0) En déduire que si f est une symétrie de E, il existe une base de E dans laquelle f est représenté par une matrice diagonale dont les éléments diagonaux valent ± 1.
Inversement que dire d'un endomorphisme de E représenté par une telle matrice?
1) Dans cette question uniquement $E = \mathbb{R}^4$ et on désigne par u,v les endomorphismes de E canoniquement (et respectivement) associés aux matrices :

$$U = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 & 3 \\ -2 & 0 & -3 & 0 \\ -2 & -1 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Vérifier sobrement que u et v sont des symétries de E et que $uov = -vou$.
b) A l'aide des traces de u et v préciser les dimensions des sous-espaces propres $Ker(u \pm id_E)$, $Ker(v \pm id_E)$.
c) Déterminer une base (x_1, x_2) de $Ker(u - id_E)$; on pose alors $x_3 = v(x_1)$ et $x_4 = v(x_2)$.
Etablir que (x_3, x_4) est une base de $Ker(u + id_E)$.
d) Prouver enfin que $(x_1, ..., x_4)$ est une base de E dans laquelle on donnera les matrices de u et v.
On revient au cas général ($n \geq 2$) en se donnant u et v symétries de E telles que $uov + vou = \omega$
2) Montrer que $tr(uov) = 0$.
3) Vérifier aussi que $tr(u) = tr(v) = 0$.
4) En utilisant le déterminant établir que n est pair.
On pose $n = 2p$.
5) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle u et v sont respectivement représentés par ces matrices blocs d'ordre n dont chaque bloc est carré d'ordre p :

$$U = \begin{pmatrix} I_p & 0_p \\ 0_p & -I_p \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} 0_p & I_p \\ I_p & 0_p \end{pmatrix}$$

Solution : On rappelle que, pour $\in L(E)$ et $t \in \mathbb{R}$, $x \in Ker(g - tid_E) \Leftrightarrow g(x) = tx$ (1).
0) En juxtaposant une base b de $Ker(f - id_E)$ et une b' de $Ker(f + id_E)$, nous obtenons β une base de E dans laquelle (cf (1)) f est représenté par $diag(1, ..., 1, -1, ..., -1)$, où 1 apparaît $r = dimKer(f - id_E)$ fois et -1 apparaît $s = dimKer(f + id_E)$.
(On remarque donc que $r + s = dimE = n$ et que $tr(f) = r - s$ (2))
Inversement si un endomorphisme h de E est représenté par une matrice $D = diag(a_1, ..., a_n)$, où chaque a_i vaut 1 ou -1, comme $D^2 = I_n$, h est bien une symétrie de E.
1)a) Simples calculs.
b) A l'aide des traces de U et V et de la remarque (2) faite plus haut, on a (puisque $n = 4$ ici) $dimKer(u - id_E) = dimKer(u + id_E) = 2$ et $dimKer(u - id_E) = 1$ puis $dimKer(u - id_E) = 3$.
c) On trouve sans peine $Ker(u - id_E) = Vect(x_1 = (3, 0, -2, 1); x_2 = (0, 1, 0, 0))$.
Dès lors $v(x_1) = (-3, 0, 2, -1)$ et $v(x_2) = (0, -1, -0, 0)$, ce qui montre la suite puisque ces vecteurs sont non colinéaires et qu'ils vivent dans un ev de dimension 2.
d) Le fait que $Ker(u - id_E)$ et $Ker(u + id_E)$ soient en somme directe implique la liberté de cette famille dont le cardinal assure qu'elle est bien une base de E.
Par ailleurs puisque $v(x_1) = x_3$,$v(x_2) = x_4$ et que $v(x_3) = v^2(x_1) = x_1$,$v(x_4) = x_4$ (ces deux derniers points provenant du fait que v est une symétrie), la matrice dans la base considérée de v est $\begin{pmatrix} 0_2 & I_2 \\ I_2 & 0_2 \end{pmatrix}$.
Par leur appartenance à $Ker(u - id_E)$, $u(x_1) = x_1$,$u(x_2) = x_2$ et enfin $u(x_3) = uov(x_1) = -vou(x_1) = -v(x_1) = -x_3$ (de même $u(x_4) = -x_4$) donc la matrice dans la base considérée de u est $\begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ 0_2 & -I_2 \end{pmatrix}$.
2) $tr(uov) = tr(vou)$ par propriété de la trace mais ici $vou = -uov$ donc (linéarité de la trace) $tr(vou) = -tr(uov) = tr(uov)$ soit $tr(uov) = 0$.
3) u et v jouant le même rôle, on se contente bien sûr de vérifier que $tr(u) = 0$. Comme $uov = -vou$ en composant à gauche par v, il vient $vouov = -u$ donc $tr(vouov) = -tr(u)$ soit aussi $tr(vovou) = -tr(u)$ ou encore $tr(u) = -tr(u)$ puisque $v^2 = id_E$ d'où enfin $tr(u) = 0$. A ce stade on peut (avec la remarque (2)) conclure que n est pair.
4) On fait agir le déterminant sur l'égalité $vou = -uov$ et on récupère $det(u)det(v) = (-1)^n det(v)det(u)$ et

puisque u et v sont des symétries leur déterminant est non nul d'où nécessairement n pair.
5) On généralise l'idée utilisée en fin de première question. On note $(x_1, ..., x_p)$ une base de $Ker(u - id_E)$ et on pose $v(x_i) = x_{p+i}$, ce pour $1 \leq i \leq p$ (cette nouvelle famille est aussi libre car image d'une telle famille par un automorphisme). Dans ce contexte $b = (x_1, ..., x_n)$ est une base de E dans laquelle u et v sont bien représentés par les matrices U (sur laquelle il y avait un pb de signe!) et V.

Exercice 3 (Centrale PC: Différence finie)
m est un entier naturel non nul.
On désigne par Δ , l'opérateur différence finie , l'application suivante :

$$\begin{cases} \mathbb{R}_m [X] \to \mathbb{R}_m [X] \\ P(X) \to P(X+1) - P(X) \end{cases} .$$

Par ailleurs , pour tout entier naturel $0 \leq k \leq m$, on pose $\Delta^k = \begin{cases} Id \text{ si } k = 0 \\ \Delta o \Delta ....o\Delta \text{ , avec } k \text{ occurences de } \Delta \end{cases}$.

On définit aussi la famille $\left(P_n \overset{def}{=} P_n(X)\right)$ des éléments de $\mathbb{R}[X]$ par :

$$P_0 = 1 \text{ et } P_n = \frac{1}{n!} X(X-1)....(X-n+1) = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (X-k) \ .$$

Ces polynômes sont communément appelés polynômes de Hilbert.
Enfin $\mathbb{Z}[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients entiers relatifs.

Etude de Δ

1) Etablir,pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $B = (P_0, ..., P_m)$ est une base de $\mathbb{R}_m [X]$.
2) Prouver que $\Delta \in L(\mathbb{R}_m [X])$.
3) Vérifier que $\Delta(P_0) = 0$ puis que $\Delta(P_k) = P_{k-1}$, pour $1 \leq k \leq m$.
4) Préciser la matrice de Δ dans la base B ainsi que son rang.
5) En déduire le noyau de Δ et déterminer son image.
6) Que vaut Δ^{m+1}? En déduire un polynôme annulateur de Δ.

$\mathbb{Z}[X]$ versus polynômes à valeurs entières.

Un élément P de $\mathbb{R}[X]$ est dit à valeursentières si : $\forall k \in \mathbb{Z}, P(k) \in \mathbb{Z}$.
7) Vérifier que tout élément de $\mathbb{Z}[X]$ està valeurs entières.
8) En utilisant des coefficients binomiaux , montrer que les P_n sont à valeurs entières.
9) Est-ce que tout polynôme à valeurs entières est dans $\mathbb{Z}[X]$?
10) Décrire l'ensemble des polynômes à valeurs entières .

Solution : 1) On se donne $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$, $\sum_{i=0}^{n} a_i P_i = 0$ et on évalue cette égalité en $j, 0 \leq j \leq n$. Ceci donne $a_j \dfrac{j!}{n!} = 0$ donc $a_j = 0$. On a affaire à une famille libre de $\mathbb{R}_n [X]$ à $n+1 = \dim \mathbb{R}_n [X]$ éléments , c'est donc une base de cet espace.
2) Déjà corrigé en début d'année (le premier jour!).
3) Simple calcul.

4) Il s'agit donc de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5) On en déduit que le noyau de Δ est $Vect(P_0)$ et que $Im(\Delta) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc, par formule du rang (ces deux espaces ayant même dimension) : $Im(\Delta) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$

6) Pour la première partie (cf 5)), on trouve ω. X^{m+1} est donc un polynôme annulateur de Δ.
7) Résulte du fait que produit et somme d'entiers relatifs sont de même nature.
8) Si $k \in \mathbb{N}$ alors $P_n(k) = \binom{k}{n} \in \mathbb{N}$.
Si $k = -p, p \in \mathbb{N}$ alors $P_n(k) = \dfrac{1}{n!}(-p)(-p-1)....(-p-n+1) = \dfrac{(-1)^n}{n!}p(p+1)....(p+n-1) = (-1)^n \binom{p+n-1}{n} \in \mathbb{Z}$.
Donc P_n est bien à valeurs entières.
9) Non car $P_2 = \dfrac{X(X-1)}{2}$ est à valeurs entières (cf ce qui précède) mais n'est pas dans $\mathbb{Z}[X]$.
10) Par 8) on voit que toute CL à coefficients entiers des P_n est bien à valeurs entières.
Inversement si P est un tel polynôme, alors $P = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k$ pour n approprié et a_k réels. Puis par évaluation en $0 \leq j \leq n$, on a successivement (cf 8))$a_0, ..., a_n$ entiers donc la réciproque de la partie précédente de cette réponse est validée■

Exercice 4 (X ENS PSI)
On admet qu'une matrice symétrique réelle est diagonalisable et que son spectre est inclus dans $\mathbb{R}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère A_n la matrice carrée de taille n, constante par diagonale :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Soit $V =^t (v_1, \dots, v_n)$ un vecteur propre de A_n associé à une valeur propre complexe λ. Montrer que λ est nécessairement réelle et que les composantes v_i de V vérifient la relation :
$$v_{i+1} - (2-\lambda)v_i + v_{i-1} = 0, \ 1 \leq i \leq n$$
où on pose $v_0 = v_{n+1} = 0$.

2. Montrer que toute valeur propre de A_n est dans l'intervalle $]0, 4[$.

3. Soit λ une valeur propre de A_n.
   (a) Montrer que les racines complexes r_1, r_2 du polynôme
   $$P(r) = r^2 - (2-\lambda)r + 1$$
   sont distinctes et conjuguées.
   (b) On pose $r_1 = \overline{r_2} = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
   Montrer qu'on a nécessairement $\sin((n+1)\theta) = 0$ et $\rho = 1$.

4. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de A_n ainsi qu'une base de vecteurs propres.

5. On considère la famille de matrices $B = [b_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant les trois propriétés suivantes (appelées M-matrices):
$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \begin{cases} b_{ii} > 0 & \\ b_{ij} \leq 0 & \forall i \neq j \\ \sum_{j=1}^{n} b_{ij} > 0 & \end{cases}$$
Montrer que si B est une M-matrice, alors on a :
   (a) B est inversible
   (b) Si $F =^t (f_1, \dots, f_n)$ a des coordonnées toutes positives, alors $B^{-1}F$ aussi,
   (c) tous les coefficients de B^{-1} sont positifs.

6. En appliquant les résultats précédents à $A_n + \varepsilon I_n$ avec $\varepsilon > 0$, montrer que tous les coefficients de A_n^{-1} sont positifs.

Solution : 1) Traduction immédiate des n égalités du système $AV = \lambda V$ pour la seconde partie de cette question.
2) Prenons $\lambda \in Sp(A_n)$, alors tout vecteur propre associé (et même le vecteur nul) initie une unique suite (v_n) (cf question précédente) réelle satisfaisant à la récurrence linéaire d'ordre 2 : $\forall i, v_{i+1} - (2-\lambda)v_i + v_{i-1} = 0$. L'équation caractérisique (3) de cette récurrence est : $r^2 - (2-\lambda)r + 1 = 0$ dont le discriminant vaut $(2-\lambda)^2 - 4$. Si celui-ci est nul alors il existe deux réels s, t tels que : $\forall i,\ v_i = (si+t)r^i$ où $|r| = 2$. Des conditions $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = 0$ on déduit que $s = t = 0$, ce qui veut dire que $v_i = 0$ pour tout i et entre en conflit avec ${}^t(v_1, ..., v_n)$ colonne propre de A_n.
Si maintenant (3) possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, il existe alors deux réels s, t tels que : $\forall i,\ v_i = sr_1^i + tr_2^i$. Les contraintes $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = 0$ donnent alors $t = -s$ et $s(r_1^{n+1} - r_2^{n+1}) = 0$. Puisque $r_1 r_2 = 1$, r_1 et r_2 ont même signe donc (par injectivité des fonctions puissances sur $\mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{R}_-$) $r_1^{n+1} - r_2^{n+1} \neq 0$ (puisque $r_1 \neq r_2$); ainsi $s = t = 0$ et on aboutit à la même contradiction que pour le précédent cas.
Le discriminant de (3) est donc strictement négatif ce qui se traduit par $\lambda \in]0, 4[$.
3)a)?b) Il existe alors deux nombres complexes non simultanément nuls s, t $\forall i,\ v_i = sr_1^i + tr_2^i$. Les conditions $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = 0$ imposent $t = -s \neq 0$ et $r_1^{n+1} = r_2^{n+1}$. Cette dernière égalité donne $\sin((n+1)\theta) = 0$. Enfin de la relation $r_1 r_2 = 1$ on tire bien $\rho = 1$.
4) Si $\lambda \in Sp(A_n)$, alors par Q3, il existe un réel θ tel que $\sin((n+1)\theta) = 0$ et $\sin\theta \neq 0$ (puisque $r_1 \notin \mathbb{R}$), qui vérifie aussi (avec les notations de Q3) $r_1 + r_2 = 2\cos\theta = 2 - \lambda$.
Autrement dit il existe $k \in [|1, n|]$ tel que $\lambda = 2(1 - \cos(\frac{k\pi}{n+1}))$.
Inversement pour une telle valeur de λ considérons la suite (v_n) définie par $v_0 = 0$, $v_1 = 1$ et $\forall i, v_{i+1} - (2-\lambda)v_i + v_{i-1} = 0$. L'équation caractéristique de cette suite admettant pour racines $r_1 = exp(\frac{ik\pi}{n+1})$ et $\overline{r_1}$, il existe un complexe non nul s tel que : $\forall i,\ v_i = s(r_1^i - r_2^i)$ (en fait $s = \frac{1}{2i\sin(\frac{k\pi}{n+1})}$)). En particulier $v_{n+1} = 0$ et par Q1, ${}^t(v_1, ..., v_n) \neq 0_{n,1}$ est bien une colonne propre de A_n.
Par double inclusion $\boxed{Sp(A_n) = \{\lambda_k = 2(1 - \cos(\frac{k\pi}{n+1})), 1 \leq k \leq n\}}$.
A_n possède donc n valeurs propres différentes, tous ses espaces propres sont des droites vectorielles. Plus précisément, les calculs précédents montrent que pour $k \in [|1, n|]$, $E_{\lambda_k} = Vect({}^t(\sin(\alpha_k), ...; , \sin(n\alpha_k))$, où $\alpha_k = \frac{k\pi}{n+1}$.
5)a) C'est le même contexte que TD 10 exercice 6. Supposons qu il existe $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $BX = 0_{n,1}$ et $X \neq 0_{n,1}$ alors (en posant $X = ^t(x_1, ..., x_n)$) en désignant par i un indice tel que $|x_i| = max\{|x_k|, 1 \leq k \leq n\}$ et en observant que $b_{ii}x_i = -\sum_{j\neq i} b_{ij}x_j$ puis que (inégalité triangulaire) $b_{ii}|x_i| \leq \sum_{j\neq i}(-b_{ij})|x_j|$ et enfin par définition de $|x_i|$ que $b_{ii}|x_i| \leq \sum_{j\neq i}(-b_{ij})|x_i|$. Comme $X \neq 0_{n,1}$, $|x_i| > 0$, on obtient finalement que $b_{ii} \leq \sum_{j\neq i}(-b_{ij})$, ce qui l'exact contraire d'une propriété que possède la matrice B. Par l'absurde, on a montré que $BX = 0_{n,1} \Leftrightarrow X = 0_{n,1}$ donc que B est inversible.
b) Notons i un indice correspondant au minimum des composantes (notées $x_1, ..., x_n$) de $B^{-1}F$. Nous voulons montrer que $x_i \geq 0$. On utilise la i-ième ligne de la relation matricielle $B(B^{-1}F) = F$ implique $b_{ii}x_i + \sum_{j\neq i} b_{ij}x_j \geq 0$ donc puisque $b_{ij}x_j \leq b_{ij}x_i$ pour $j \neq i$ (ce parce que pour de tels indices $b_{ij} \leq 0$) on aurait $x_i(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}) \geq 0$ donc le résultat escompté puisque $\sum_{j=1}^{n} b_{ij} > 0$.
c) Il suffit d'appliquer la question précédente à la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.
6) Pour tout $\epsilon > 0$, $A_n + \varepsilon I_n$ est une M-matrice donc cette matrice est inversible et son inverse $(A_n + \varepsilon I_n)^{-1}$ est à coefficents positifs. Le théorème de Cayley-Hamilton (et le cours sur les polynômes annulateurs) montre que si $M \in GL_n(\mathbb{R})$, alors son inverse est un polynôme en M à coefficients réels. Ce qui montre que les coefficients de M^{-1} sont des fonctions rationnelles des coefficients de M. Autrement dit $M \to M^{-1}$ est une application continue sur $GL_n(\mathbb{R})$ et puisque $A_n + \varepsilon I_n \to A_n$ (i.e le coefficient d'indice i, j de $A_n + \varepsilon I_n$ tend vers celui de A_n de même indice si ϵ tend vers 0 et ce pour tout i, j) si $\epsilon \to 0^+$, on aura aussi (dans les mêmes conditions) $(A_n + \varepsilon I_n)^{-1} \to A_n^{-1}$ et ainsi par conservation des inégalités larges à la limite, les

coefficients de A_n^{-1} sont positifs$\blacksquare$

NB : Les questions 5 et 6 sont hors barême mais toute tentative cohérente d'y répondre a été récompensée.