DS 2 bis et facultatif (X-ENS) : Corrigé

On propose ici de revenir sur la toute fin du DS2 en proposant une approche légèrement différente.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère A_n la matrice carrée de taille n, constante par diagonale :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

.

Une matrice A à coefficients réels (carrée ou non) est dite positive si tous ses coefficients sont positifs. On écrit alors $A \geq 0$.
Une matrice carrée, à coefficients réels, est dite monotone si elle est inversible et si $A^{-1} \geq 0$.

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Etablir que A est monotone si et seulement si est satisfaite l'inclusion :

$$\{v \in M_{n,1}(\mathbb{R}), Av \geq 0\} \subset \{v \in M_{n,1}(\mathbb{R}), v \geq 0\}$$

2. Montrer que A_n est monotone.

Solution :
1. On procède par double implication.
i) Supposons $\{v \in M_{n,1}(\mathbb{R}), Av \geq 0\} \subset \{v \in M_{n,1}(\mathbb{R}), v \geq 0\}$ (cette propriété sera noté (P)).
Pour montrer que A est inversible, il suffit donc que nous vérifiions que $Av = 0_{n,1} \Longrightarrow v = 0_{n,1}$.
Donnons nous $v \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $Av = 0_{n,1}$ alors avec (P) on a $v \geq 0$.
Mais (par linéarité) on a aussi $A(-v) = 0_{n,1}$ donc $-v \geq 0$, toujours par (P).
Bilan 1 : $v = 0_{n,1}$ et A inversible.
On note $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$, pour montrer que $A^{-1} \geq 0$, il suffit de montrer que chaque $A^{-1}e_i$ est positif.
Or $A(A^{-1}e_i) = e_i \geq 0$ donc par (P) $A^{-1}e_i \geq 0$.
Bilan 2 : $A^{-1} \geq 0$, des deux bilans on déduit bien que A est monotone.
ii) On suppose A monotone et en observant que le produit de deux matrices positives l'est aussi, la propriété (P) est vérifiée.
2) On va vérifier pour cela la propriété (P).
On se donne $v \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $Av \geq 0$ et on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe k, $1 \leq k \leq n$ tel que $v_k < 0$.
On considère le minimum des v_k (celui-ci est strictement négatif) et on note j le plus petit des entiers tels v_j soit égal à ce minimum.
Traduisons d'abord $Av \geq 0$: $2v_1 - v_2 \geq 0$, $-v_{i-1} + 2v_i - v_{i+1} \geq 0$, pour $2 \leq i \leq n-1$ et $-v_{n-1} + 2v_n \geq 0$.
i) $j = 1$ donc $v_1 < 0$ et $v_2 \geq 0$ c'est incompatible avec $2v_1 - v_2 \geq 0$.
ii) $j = n$ donc $v_n < 0$ et $v_n \leq v_{n-1}$ donc $-v_{n-1} + 2v_n = (v_n - v_{n-1}) + v_n < 0$; ce qui contredit $-v_{n-1} + 2v_n \geq 0$. Absurde là aussi.
iii) $2 \leq j \leq n-1$ alors $-v_{j-1} + 2v_j - v_{j+1} = (v_j - v_{j+1}) + (v_j - v_{j-1})$ et la première parenthèse est négative par minimalité de v_j, la seconde est strictement négative puisque j est le plus petit indice pour lequel un v_k est minimal. Ainsi $-v_{j-1} + 2v_j - v_{j+1} < 0$, ce qui est encore absurde.
Nous avons prouvé que la A_n satisfait la propriété (P) donc qu'elle est monotone ■