Corrigé TD 9

Les trop nombreuses fautes de frappe (et autres) de l'énoncé ont été (je pense) corrigées.
Exercice 1 :
Montrer que deux matrices semblables ont les mêmes polynômes annulateurs.
Réciproque ?
Exercice 2 : (Polynôme minimal d'une matrice)
Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$.
a) Montrer que la famille $(M^k)_{0\leq k\leq n^2}$ est une famille liée de $M_n(\mathbb{K})$.
b) En déduire l'existence d'un polynôme non nul, annulateur de M.
c) Justifier alors l'existence d'un polynôme unitaire annulateur de M de dégré minimal. Montrer que celui-ci est unique. Il s'agit du polynôme minimal de M. On le note P.
d) Montrer que l'ensemble des polynômes annulateurs de M (le polynôme nul compris) est l'ensemble des multiples de P.
e) Quel est le polynôme minimal d'une matrice de symétrie ?
Solution :
a) Cette famille comporte n^2+1 éléments alors que $dim(M_n(\mathbb{K})) = n^2$, elle est nécessairement liée■
b) La question précédente met en évidence des scalaires non tous nuls $a_0, ..., a_{n^2}$ tels que $\sum_{k=0}^{n^2} a_k M^k = 0_n$.

Ce qui peut s'écrire, en posant $S = \sum_{k=0}^{n^2} a_k X^k$, $S(M) = 0_n$. S est donc bien un polynôme annulateur de M et il n'est pas nul puisqu'au moins un des a_k est différent de 0■
c) On considère à nouveau le polynôme non nul S précédent et on note a son coefficient dominant (qui est non nul par définition d'un tel coefficient). Dès lors $H = \frac{1}{a}S$ est un polynôme annulateur unitaire de M. Il existe au moins un tel polynôme et on peut bien déterminer le degré minimal, noté d, de tels polynôme (une partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément).
Supposons qu'il existe A, B deux polynômes annulateurs de M, unitaires et de degré d, alors $A-B$ est aussi un polynôme annulateur de M et son degré est $\leq d-1$. Si jamais ce polynôme n'est pas nul, en divisant par son coefficient dominant, on trouverait un polynôme unitaire, annulateur de M et de degré $< d$; ce qui contredirait la minimalité de d. Par l'absurde $A - B = 0$ soit $A = B$■
d) Notons I l'ensemble des polynômes annulateurs de M et consiérons L un élément de $\mathbb{K}[X]$ divisible par P. Il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $L = QP$ donc (cf cours) $L(M) = Q(M)P(M) = Q(M)0_n = 0_n$. Ainsi L est bien un polynôme annulateur de M.
Inversement si T est un tel polynôme, on considère $T = AP + R$ la division euclidienne de T par P alors $T(M) = A(M)P(M) + R(M)$ soit $0_n = A(M)0_n + R(M)$. Finalement $R(M) = 0_n$ et $deg(R) < deg(P) = d$ si $R \neq 0$ (en divisant par son coefficient dominant), on contredirait à nouveau la minimalité de d donc $R = 0$ et P divise T. D'où le résultat par double inclusion■
e) On aura observer qu'un polynôme annulateur non nul est au moins de degré 1.
Par le cours on sait que X^2-1 est polynôme annulateur d'une symétrie. Donc pour son polynôme minimal 3 candidats : $X-1, X+1, X^2-1$. Pour le premier cas notre symétrie est l'identité, pour le second -l'identité; sinon c'est le dernier cas ■
Exercice 3 : (Lemme des noyaux dans un cas simple)
Soient $x_0, ..., x_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts et $L = (L_0, ..., L_n)$ la base de Lagrange associée à $x_0, ..., x_n$.
a) Que vaut $\sum_{k=0}^{n} L_k$?
On pose $A = \prod_{k=0}^{s}(X - x_k)$ et $B = \prod_{k=s+1}^{n}(X - x_k)$, où s est entier naturel inférieur à $n-1$.
b) A l'aide du a), déterminer P et Q de $\mathbb{K}[X]$ tels que $PA + QB = 1$.
c) En déduire que si AB est un polynôme annulateur de $f \in L(E)$ alors $E = Ker(A(f)) \oplus Ker(B(f))$.
Solution :

a) D'après le cours si $P \in \mathbb{K}[X]$ alors $P = \sum_{k=0}^{n} P(x_k)L_k$ est la décomposition de P dans la base L; en prenant $P = 1$, nous obtenons ce qui est demandé$\blacksquare$

b) En remarquant que A divise tous les L_k pour $k > s$ et que B les divise tous mais pour $k \leq s$ et en posant dans $L_k = A_k A$ et $L_k = B_k B$ pour des indices cohérents (au vu de ce qui précède), nous avons (cf a)) : $1 = A(\sum_{k=s+1}^{n} A_k) + B(\sum_{k=0}^{s} B_k)$; la détermination des polynômes P et Q en découle$\blacksquare$

c) Montrons d'abord que nos deux noyaux sont en somme directe en prenant x dans leur intersection. Alors $A(f)(x) = B(f)(x) = 0_E$ donc $P(f)oA(f)(x) + Q(f)oB(f)(x) = 0_E$ mais aussi (avec b) et le cours) : (1) $P(f)oA(f) + Q(f)oB(f) = id_E$ donc $x = 0_E$ et notre somme est bien directe.

La relation (1) appliquée à tout $x \in E$ donne $P(f)oA(f)(x)+Q(f)oB(f)(x) = x$. Posons $y = P(f)oA(f)(x)$ et $z = Q(f)oB(f)(x)$; nous avons déjà $\boxed{x = y + z}$.

Mais puisque les polynômes d'endomorphismes en f sont permutables (Cours et puisque $A(f)oB(f) = AB(f)$ Re cours): $B(f)(y) = P(f)o(AB)(f)(y)$. Or AB est un polynôme annulateur de f donc $(AB)(f)(y) = 0_E$ et ainsi $y \in Ker(B(f))$; on montre de même que $z \in Ker(A(f))$. Ce qui montre bien que E est somme de $Ker(B(f))$ et de $Ker(A(f))$$\blacksquare$

Exercice 4 : (Centrale PC 2015)

On se propose de déterminer tous les sous-espaces vectoriels de $E = \mathbb{K}[X]$ stables par l'opérateur de dérivation, noté D.

1) Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $K_n[X]$ est stable par D et que l'endomorphisme de $K_n[X]$ induit par D est nilpotent. On en précisera l'indice de nilpotence.

2) On se donne F sev de E, stable par D et de dimension finie égale à $m \geq 1$.

a) Justifier l'existence d'un polynôme $P \in F$ de degré maximal.

Ce degré sera noté d.

b) Etablir que $(P, D(P), ...D^d(P))$ est une famille libre de F. En déduire que $d + 1 \leq m$.

c) En constatant que $F \subset \mathbb{K}_d[X]$, vérifier que $F = K_d[X]$.

3) En s'inspirant de la méthode utilisée en 2), montrer que si F est stable par D et que F n'est pas de dimension finie alors $F = E$.

4) Déterminer tous les sev de E stables par D.

Solution :

2)b) Puisque P appartient à F et que ce dernier est stable par D alors $D(P) \in F$ et, par itération de cet argument, les dérivés succesives de P sont dans F; il s'agit donc bien d'une famille de F et de degré échelonné (puisque la dérivation abaisse celui-ci et qu'aucun des membres de cette famille n'est nul); elle est bien libre donc son cardinal est inférieur à la dimension de l'espace vectoriel qui la contient d'où $\boxed{d + 1 \leq m}$$\blacksquare$

c) Puisque, par définition de d tout polynôme de F est de degré $\leq d$, on a donc $F \subset \mathbb{K}_d[X]$ et, par conséquent $dim(F) = m \leq d + 1$

On en déduit bien l'égalité voulue puisque F est un sev de $\mathbb{K}_d[X]$ ayant au moins la dimension de ce dernier (par b)$\blacksquare$

3) Soit $P \in E$. Nous allons montrer que $P \in F$. Puisque F n'est pas de dimension finie, il contient des polynômes de degré arbitrairement grand. En particulier il existe $Q \in F$ tel que $d = deg(Q) > deg(P)$ (1) donc (cf ce qui précède) $(Q, D(Q), ..., D^d(Q))$ est une famille libre de F qui est aussi une base de $\mathbb{K}_d[X]$; ainsi $\mathbb{K}_d[X] \subset F$ et comme $P \in \mathbb{K}_d[X]$ (en vertu de (1)), on a bien montré que $F = E$$\blacksquare$

4) Les sev de E stables par D, de dimension finie sont les $K_n[X]$ pour $n \in \mathbb{N}$ auquel on se doit de rajouter $\{0_E\}$(exclu par l'étude menée plus haut). Le seul sev de E stable par D qui ne soit pas de dimension finie est $E$$\blacksquare$

Exercice 5 : (Utilisation de Vandermonde)

1)Soient n nombres complexes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ deux à deux distincts et tous non nuls, démontrer que l'une au moins des sommes $\sum_{k=1}^{n} x_k, \sum_{k=1}^{n} x_k^2, \sum_{k=1}^{n} x_k^3 \quad \cdots \sum_{k=1}^{n} x_k^n$ est non nulle.

2) Que dire de 4 nombres complexes x, y, z, t tels que $x^i + y^i + z^i + t^i = 0$ pour $i \in [\![1, 4]\!]$?

Solution :

1) Notons M la matrice d'ordre n dont le déterminant est $V(x_1, ..., x_n)$. Pour être plus précis $M = (x_j^{i-1})_{1 \leq i,j \leq n}$. Posons aussi $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Supposons que toutes les sommes proposées soient nulles. Cela donne matriciellement $MX = 0_{n,1}$; puisque les x_i sont deux à deux distincts (Vandermonde) M est inversible et en multipliant (à gauche) par M^{-1} les deux membres de l'égalité prcédente, nous obtenons $X = 0_{n,1}$. Ce qui est contradictoire donc au moins une des sommes est non nulle■

2) Ecartons la solution triviale. Par 1) cela veut dire que, par exemple, $z = t$ donc en raisonnant sur les trois premières équations et en posant $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2z \end{pmatrix}$, nous avons l'égalité $NY = 0_{3,1}$

Comme Y n'est pas la colonne nulle (solution écartée), la matrice N n'est pas inversible. On envisage alors deux cas :

$x = y$ ce qui donne $x + z = 0$ $x^2 + y^2 = 0$ soit $x = y = z = t = 0$ absurde.

$x = z$ (ou $y = z$) ce qui donne $y + 3z = 0$ et $y^2 + 3z^2 = 0$ et aboutit à la même contradiction.

Finalement seul $(0, 0, 0, 0)$ est solution du problème■

Exercice 6 : (Interpolation de Lagrange et décomposition en éléments simples)

On note $(L_0, ..., L_4)$ la base de Lagrange associée aux points $1, 2, 3, 4, 5$.

On pose $P = \prod_{i=1}^{5}(X - i)$.

a) Décomposer dans cette base P'.

b) En déduire qu'il existe un unique quintuplet $(a_1, .., a_5)$ tel que :

$\forall x \in \mathbb{R} - \{1, .., 5\}, \dfrac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{5} \dfrac{a_i}{x - i}$.

Le déterminer.

Solution :

Pour plus d'harmonie dans l'indexation les polynômes de Lagrange seront notés $L_1, ..., L_5$.

a) Par le cours $P' = \sum_{i=1}^{5} P'(i)L_i$.

Par définition $L_i = \prod_{1\le j\le 5, j\ne i} \dfrac{X - j}{i - j}$, ce pour tout $i \in [\![1, 5]\!]$. Ce qui peut s'écrire $L_i = b_i \prod_{1\le j\le 5, j\ne i} (X - j)$, où $b_1 = b_5 = \dfrac{1}{24}$, $b_2 = b_4 = -\dfrac{1}{6}$ et $b_3 = \dfrac{1}{4}$.

b) L'égalité entre fractions équivaut (en multipliant chaque membre par P) à l'égalité polynomiale : $P' = \sum_{i=1}^{5} \dfrac{a_i}{b_i} L_i$ qui n'a lieu (unicité des composantes dans une base) que si et seulement si $\dfrac{a_i}{b_i} = P'(i)$, ce pour tout $i \in [\![1, 5]\!]$.

Un rapide calcul donne alors $a_i = 1$ pour tout i ■